Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ

THOMAS TAYLOR

ΕΛΛΑΔΑ

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ - ΕΠΙΣΤΗΜΗ

Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ

Η ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΩΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΩΝ

THOMAS TAYLOR

Μετάφραση
Μαρία Οικονομοπούλου

ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ
1995

Τίτλος Πρωτότυπου:
The Theoretic Arithmetic of the Pythagoreans

Εκδόσεις «ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ»
Μάρνη 5-7, 104 33 Αθήνα
Τηλ. 5221744, 5227678, FAX: 01-5226581

ISBN 960-268-060-1

Επιμέλεια κειμένου: Βίκυ Τάτση
Επιμέλεια εξώφυλλου: Λίλυ Γκορτσοπούλου

ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΗ

Ένα πέπλο μυστηρίου καλύπτει τη ζωή και το έργο μιας από τις σημαντικότερες μορφές της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας, του Πυθαγόρα του Σάμιου. *Οι σύγχρονοι του μα και οι μετέπειτα στοχαστές εκφράστηκαν για αυτόν με τον πλέον αντιφατικό τρόπο. Τον είπαν μάγο, δαίμονα, φιλόσοφο και επιστήμονα, αλλά και αντιγραφέα, τσαρλατάνο και ένα σωρό άλλα.*

Ωστόσο, κανείς δεν αμφισβήτησε το ότι κατάφερε να επιδράσει σημαντικά στη μετέπειτα ανάπτυξη του φιλοσοφικού στοχασμού, καταφέρνοντας να γεφυρώσει τη θρησκευτική με τη φιλοσοφική αναζήτηση. Προσέγγισε όλα τα πεδία έρευνας, από εκείνο της μελέτης της εξωτερικής και απτής φύσης, μέχρι τα πιο αφηρημένα και αδιερεύνητα πέρατα του Σύμπαντος.

Μέσα από το πνευματικό οικοδόμημα του Πυθαγόρα *οι επιστήμες απέκτησαν ουσιαστικό και φιλοσοφικό υπόβαθρο, ξεφεύγοντας από την απλή και καθημερινή χρήση τους. Η* αστρονομία, *η* μουσική, *αλλά κατά κύριο λόγο τα* μαθηματικά, *θεωρούμενα ως περιλαμβάνοντα καθετί άλλο, προσέγγισαν το απώγειο της ουσιαστικής τους διάστασης, ως μέσα για την πνευματική εξύψωση και τελείωση της ανθρώπινης οντότητας.*

Μπορεί στους καιρούς μας να έχει λησμονηθεί το πνεύμα του Πυθαγόρα, *αλλά το ότι θεμέλιο της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης αποτελεί η αριθμητική του, κανείς δεν μπορεί να το αμφισβητήσει. Όταν μιλάμε για περιττούς και άρτιους αριθμούς, για ρητούς ή άρρητους, για αναλογίες και αριθμητικές ή γεωμετρικές προόδους, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η καταγωγή και η ονομασία τους -καθώς και πολλών άλ-*

λων- ανάγονται στον ίδιο τον Πυθαγόρα *και τους μετέπειτα οπαδούς της φιλοσοφίας του, τους* Νεοπυθαγόρειους.

Στο παρόν έργο γίνεται μια από τις σοβαρότερες προσπάθειες συγκρότησης και παράθεσης των βασικότερων εννοιών που αποτελούν τη Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων, *από έναν άνθρωπο που αφιέρωσε τη ζωή του στην αρχαία ελληνική φιλοσοφία. Ο* Τόμας Τέιλορ *(1758-1835) μετέφρασε σχεδόν ολόκληρη την ελληνική κλασική γραμματεία στην αγγλική γλώσσα, ενώ εξέδωσε και μερικά δικά του έργα, εκ των οποίων το σπουδαιότερο είναι η* Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων. *Χρησιμοποιεί όλες τις διαθέσιμες αρχαίες πηγές, όπως τα έργα του* Πλάτωνα, *του* Αριστοτέλη, *του* Πρόκλου, *του* Πλωτίνου, *του* Πλουτάρχου, *του* Θέωνα του Σμυρναίου, *του* Ιάμβλιχου, *κ.α., μαζί με τις δικές του μελέτες, προκειμένου να αναβιώσει τις θεμελιώδεις αρχές της Πυθαγόρειας Φιλοσοφίας.*

Παρά τις δυσκολίες του εγχειρήματός του, κατάφερε να παρουσιάσει μια εντυπωσιακή πραγματεία, της οποίας η κατανόηση προϋποθέτει ενδελεχή μελέτη και αδιάλειπτο στοχασμό. Μπορεί το έργο του αναγνώστη να μην είναι εύκολο, αλλά η προσέγγιση της κάθε έννοιας αποτελεί οδοδείκτη για την επόμενη και έτσι διαγράφεται ένα ταξίδι του νου προς όλο και υψηλότερες σφαίρες συνειδητοποίησης.

Αθήνα 1995 **Ιάμβλιχος**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΟ ΔΥΟ

ΒΙΒΛΙΟ ΤΡΙΑ

Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ Η ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΟΥ

«Αυτοί που καλούνται Πυθαγόρειοι, ασχολήθηκαν πρώτοι με τα μαθηματικά και ανέπτυξαν αυτή τη σπουδή και αφού ανατράφηκαν μέσα σ' αυτά, θεώρησαν ότι οι αρχές τους είναι αρχές των πάντων.

(Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά,* Α5.)

Η μελέτη της ζωής του Πυθαγόρα αλλά και της φιλοσοφίας του είναι θέμα που απασχόλησε αρκετούς διανοούμενους από τις παλιότερες εποχές μέχρι τις μέρες μας. Το κύριο πρόβλημα στη μελέτη και την καταγραφή υπήρξε η έλλειψη πηγών, μια και τίποτε δε σώζεται από την εποχή του Πυθαγόρα. Πολλοί μετέπειτα φιλόσοφοι έκαναν αναφορές στον ίδιο και τη φιλοσοφία του αποσπασματικά, αλλά ποτέ δεν υπήρξε σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στις μυθικές διηγήσεις και την πραγματικότητα, πέρα βεβαίως από το γεγονός της ατομικής προκατάληψης, η οποία πρέπει να λαμβάνεται υπόψη, θετικά ή αρνητικά. Δύο είναι οι βιογραφίες του Πυθαγόρα που έχουν διασωθεί, η μία είναι του Πορφύριου και η άλλη του Ιάμβλιχου, αλλά και οι δύο είναι γραμμένες τουλάχιστον 800 χρόνια μετά.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε τις γενικά αποδεκτές απόψεις σχετικά με το πρόσωπο του Πυθαγόρα και τις θεωρίες του -και μάλιστα εν συντομία- προκειμένου να βοηθηθεί ο αναγνώστης στην ανάγνωση του παρόντος βιβλίου.

Η επικρατούσα άποψη είναι πως ο Πυθαγόρας γεννήθηκε στη Σάμο μεταξύ 570 και 580 π.Χ. Ο πατέρας του ονομαζόταν Μνήσαρχος και η μητέρα του Παρθενίς. Λέγεται δε πως το όνομα Πυθαγόρας του το έδωσαν οι γονείς του επειδή, μετά από επίσκεψή τους στο Μαντείο των Δελφών, η Πυθία τους ανήγγειλε την επερχόμενη γέννησή του, χωρίς ακόμη οι ίδιοι να το γνωρίζουν. Τους είχε μάλιστα τονιστεί ο ιδιαίτερος ρόλος που θα διαδραμάτιζε στην ανθρωπότητα.

Με αφορμή τούτα τα τελευταία λόγια του χρησμού, φρόντισε ο πατέρας του από νωρίς να έχει ιδιαίτερη μόρφωση και σταδιακά ο νεαρός Πυθαγόρας άρχισε να αναδεικνύει τα σπουδαία πνευματικά του χαρίσματα. Πολύ γρήγορα έγινε γνωστός και στους επώνυμους σοφούς εκείνης της εποχής και μάλιστα διατηρούσε πολύ καλές σχέσεις με το Θαλή το Μιλήσιο.

Εκείνο τον καιρό κυβερνήτης της Σάμου ήταν ο τύραννος Πολυκράτης, τον οποίο άλλοι παρουσιάζουν φιλομαθή και φιλότεχνο, ενώ άλλοι φιλήδονο και έκφυλο. Γεγονός είναι πως αυτός -λέγεται- χρηματοδότησε τον Πυθαγόρα και τον παρότρυνε να πάει στην Αίγυπτο, δίνοντάς του και συστατικές επιστολές για τον Άμασι Β'. Και ο Πυθαγόρας αποφάσισε την πραγματοποίηση αυτού του ταξιδιού, μια και ο Θαλής του είχε μιλήσει για τη μυστηριακή αυτή χώρα και για τα όσα είχε να μάθει εκεί.

Ξεκινώντας λοιπόν από τη Σάμο, ο Πυθαγόρας δεν πάει κατευθείαν στην Αίγυπτο, αλλά σταματά για λίγο καιρό στην Κρήτη. Εκεί έρχεται σε επαφή με τους ιερείς του Δία και αναφέρεται πως μυήθηκε στα εκεί μυστήρια, περνώντας από μια τελετή που διαρκούσε 9 ημέρες. Αφού παρέμεινε εκεί διδασκόμενος για κάποιο διάστημα, αποφάσισε να συνεχίσει το ταξίδι του προς την Αίγυπτο και πράγματι έγινε δεκτός στη Διόσπολη. Ακολούθησε μια μακρόχρονη διδασκαλία ως υποψήφιος των μυστηρίων, διδάχθηκε όλες τις επιστήμες των αιγυπτίων ιερέων και τελικά μυήθηκε με επιτυχία.

Οι διάφορες πηγές, όμως, δε δίνουν τέλος σε τούτη την πορεία αναζήτησης και αναφέρουν πως με κάποιο τρόπο βρέθηκε στη Βαβυλώνα, όπου και διδάχθηκε τις ιερές τέχνες

των μάγων - ιερέων που ζούσαν εκεί. Κάποιοι λένε πως πιάστηκε αιχμάλωτος στην Αίγυπτο μετά από επιδρομή των Βαβυλωνίων, ενώ άλλοι ότι πειρατές κατέλαβαν το καράβι που επέβαινε και μαζί με άλλους τον έσυραν αιχμάλωτο στη Βαβυλώνα. Πάντως το ανήσυχο πνεύμα του προσέλκυσε το ενδιαφέρον των σοφών ιερέων της Βαβυλώνας και για άλλη μια φορά εντρύφησε στα μυστήρια και τις νέες διδασκαλίες για αρκετό καιρό, μελετώντας το Ζωροαστρισμό και μυούμενος στα Χαλδαϊκά μυστήρια. Τελικά επέστρεψε στην πατρίδα του και οι περισσότεροι συμφωνούν πως αυτή η μυητική εμπειρία του Πυθαγόρα στις διάφορες χώρες διήρκεσε σχεδόν είκοσι χρόνια.

Η επιστροφή στη Σάμο τον βρίσκει να έχει υπερβεί πλέον την πέμπτη δεκαετία της ζωής του και να έχει διαμορφώσει τις θεμελιώδεις ιδέες της φιλοσοφίας του, την οποία αρχίζει να διδάσκει. Σύντομα δημιουργήθηκε ένας κύκλος οπαδών, οι περισσότεροι από τους οποίους έμεναν μαζί του σε κάτι σπηλιές. Ωστόσο δε θα μείνει στη γενέτειρά του για πολύ καιρό. Κανείς δε διασαφηνίζει τους λόγους που τον ώθησαν να φύγει μακριά από αυτή, παρόλο που ορισμένοι ισχυρίστηκαν ότι δεν ανεχόταν τη χλιδή και την πολυτέλεια που επικρατούσαν υπό τη διακυβέρνηση του Πολυκράτη.

Έτσι, γύρω στα 518 π.Χ. μεταβαίνει στον Κρότωνα της Ιταλίας, μια από τις πόλεις της Μεγάλης Ελλάδας. Εκεί τυγχάνει θερμής υποδοχής μια και ήδη η φήμη του ήταν εξαπλωμένη και μάλιστα λέγεται ότι στην πρώτη δημόσια ομιλία του παραβρέθηκαν δύο χιλιάδες άνθρωποι. Σε ένα τόσο ευνοϊκό κλίμα μπαίνουν τα θεμέλια της Σχολής του και συγκροτείται το περίφημο «Ομακοείο». Η όλη οργάνωση στηρίχθηκε σε κοινοβιακά πρότυπα με αυστηρές αρχές και κανόνες, σε βαθμό που αργότερα έγιναν παροιμιώδεις. Η διδασκαλία του είχε τρομερή απήχηση και περιελάμβανε ένα κράμα θρησκευτικών και φιλοσοφικών στοιχείων. Φυσικά ένας τέτοιος διαχωρισμός μόνο εκ των υστέρων θα μπορούσε να γίνει, διότι ο Πυθαγόρας είναι ο πρώτος που διατυπώνει τη λέξη «φιλοσοφία» για τις αναζητήσεις του και τον προσ-

διορισμό «φιλόσοφος» για τους ανθρώπους που στρέφονται προς την επίλυση των αιώνιων προβλημάτων.

Από όλα τα μέρη της Ελλάδας αλλά και του τότε γνωστού κόσμου συνέρρεαν άνθρωποι για να ακούσουν τις διδαχές του, να γίνουν μαθητές του και να ακολουθήσουν τον τρόπο ζωής που επαγγελόταν. Σε ελάχιστο χρόνο η φήμη του διαπέρασε την οικουμένη και οι ιδέες του άγγιξαν αρκετά πρωτοπόρο πνεύματα εκείνης της εποχής. Πολλοί και από διάφορες περιοχές υπήρξαν μαθητές του, αρκεί να αναφερθεί ότι μεταξύ αυτών υπήρξε και ένας δρυΐδης, ο Άβαρις.

Η επίδραση που άσκησε ο Πυθαγόρας δεν ήταν μόνο επί φιλοσοφικού επιπέδου, αλλά έδωσε μια νέα ηθική και κοινωνική διάσταση στους ανθρώπους και ιδίως στους Κροτωνιάτες. Κατ' αυτόν τον τρόπο, όπως ήταν φυσικό, είχε έναν κυρίαρχο λόγο στα πολιτικά πράγματα της πόλης και αρκετές ήταν οι φορές που είχε δώσει λύσεις και συμβουλές. Αυτή ακριβώς η καταλυτική του παρουσία στα πολιτικά δρώμενα ίσως ήταν η αιτία μιας αντίδρασης που ξεσηκώθηκε προς αυτόν, με πρωτεργάτη τον Κύλωνα, βασικό εκπρόσωπο της ντόπιας ολιγαρχίας. Αυτός κατάφερε κάποια στιγμή να ξεσηκώσει και να στρέψει ένα μεγάλο μέρος του πληθυσμού ενάντια στους Πυθαγόρειους, με αποτέλεσμα να ξεσπάσουν βίαιες ταραχές και πολλοί να οδηγηθούν στη φυγή, ενώ ορισμένοι και στο θάνατο. Λέγεται πως ο Πυθαγόρας βρισκόταν στη Δήλο τις ημέρες των ταραχών, προκειμένου να περιθάλψει τον ετοιμοθάνατο δάσκαλο του Φιλόλαο, μα όταν επέστρεψε, δεν του έμενε τίποτε άλλο να κάνει από το να φύγει και αυτός. Πραγματικά κατέφυγε στο Μεγαπόντιο και για να αποφύγει τους εχθρούς του κλείστηκε στο ναό των Μουσών. Οι απόψεις για τον τρόπο θανάτου του διΐστανται, καθώς κάποιοι λένε ότι πέ.θανε μέσα στο ναό από ασιτία, ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι δολοφονήθηκε από εξαγριωμένους αντιπάλους του. Πέθανε σε ηλικία 75 ή 80 χρόνων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ

Όπως προαναφέραμε, η πυθαγόρεια σκέψη δομήθηκε μέσα από ένα κράμα θρησκευτικής πίστης και φιλοσοφίας. Κατά γενική ομολογία των μεταγενέστερων το πνεύμα του Ορφισμού διαπερνούσε την πυθαγόρεια φιλοσοφία. Ή, για να το πούμε με άλλα λόγια, η φιλοσοφία του Πυθαγόρα υπήρξε η φιλοσοφική πραγμάτωση της ορφικής πίστης.

Το βασικότερο δόγμα του Πυθαγόρα ήταν η πίστη στην αθανασία της ψυχής, η οποία αναπτύσσεται διαρκώς και αλλάζει σώματα προκειμένου να λυτρωθεί τελικά από τη θνητή ζωή και καθαρή να λάβει τη θέση της μεταξύ των αθανάτων όντων. Δηλαδή, ήταν αποδεκτή η θεωρία της μετενσάρκωσης της ψυχής, η οποία μέσα από έναν κύκλο γεννήσεων απελευθερώνεται από το θνητό σώμα.

Επομένως, ο άνθρωπος -κατά τους Πυθαγόρειους- έχει σαν σκοπό της ζωής του να αποτινάξει το ζυγό του θνητού σώματος και να γίνει καθαρό πνεύμα, οπότε θα ενωθεί με το συμπαντικό πνεύμα στο οποίο ανήκει.

Ο Πυθαγόρας πιθανολογείται πως ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο «κόσμος» προκειμένου να υποδηλώσει το Σύμπαν σαν μια οργανωμένη τάξη. Το Σύμπαν διέπεται από μια τάξη και είναι οργανωμένο και έμψυχο. Δεν υπάρχει τίποτε άψυχο και κενό ζωής κατά τους Πυθαγόρειους. Με αυτόν τον τρόπο παρουσιάζεται η έννοια της «συγγένειας ολόκληρης της φύσης»· και όπως το Σύμπαν είναι «κόσμος» οργανωμένος, έτσι και ο άνθρωπος αποτελεί μια μικρογραφία αυτού του «κόσμου», ένα μικρόκοσμο. Μελετώντας αυτόν τον μικρόκοσμο, ουσιαστικά σπουδάζουμε τις θεμελιώδεις δομές του Σύμπαντος. Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, ότι για τους Πυθαγόρειους ο κόσμος δεν είναι ένα αντικείμενο έρευνας, πειραματισμού και επιβολής, αλλά μια ιερή τάξη γεμάτη δυνάμεις και η συμμετοχή σε αυτές δρα αποκαλυπτικά στη νόησή μας και διεγείρει βαθύτατα τον εσωτερικό μας κόσμο.

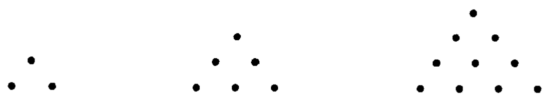
Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο της πυθαγόρειας σκέψης είναι η έννοια του πέρατος ή ορίου. Από τη στιγμή που υφί-

σταται ο κόσμος, η οργανωμένη τάξη στο Σύμπαν, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ορίου, καθώς οτιδήποτε δεν έχει προκαθορισμένα όρια είναι άμορφο και ταιριάζει στο χάος. Ο κόσμος δημιουργείται με την παρέμβαση του ορίου στο άπειρο, οπότε αποκαλύπτεται μια καθορισμένη ενότητα. Το καθορισμένο και το απροσδιόριστο αποτελούν τις δυο βασικές αντίθετες αρχές για τους Πυθαγόρειους, από τις οποίες η πρώτη είναι το καλό και η δεύτερη το κακό, αφήνοντας να φανεί η έννοια του δυϊσμού στη φιλοσοφία τους. Ο Αριστοτέλης παραθέτει έναν πίνακα του Αλκμαίωνα του Κροτωνιάτη με τα βασικά αντίθετα των Πυθαγορείων:

πέρας — άπειρον
περιττόν — άρτιον
εν — πλήθος
δεξιόν — αριστερόν
άρρεν — θήλυ
ηρεμούν — κινούμενον
ευθύ — καμπύλον
φως — σκότος
αγαθόν — κακόν
τετράγωνον — ετερομήκες

Εκείνο, όμως, που διαφοροποιεί εντελώς τη φιλοσοφική σκέψη του Πυθαγόρα από τους υπόλοιπους είναι ο τρόπος ή διαδικασία κάθαρσης και απελευθέρωσης της ψυχής. Πάνω στα μέσα για την επίτευξη αυτού του σκοπού οικοδομήθηκε ένα οικοδόμημα απέραντου πνευματικού ύψους. Ο Πυθαγόρας χρησιμοποιεί τα μαθηματικά για τη διείσδυση του στις πιο υψηλές περιοχές του νου και δεν το κάνει με κάποια δεισιδαιμονική αντιμετώπιση τους. Αντίθετα, θεμελιώνει τη μαθηματική επιστήμη και την ανάγει σε φιλοσοφική θεωρία. Ξεφεύγει από τις μετρήσεις και τις λογιστικές ενασχολήσεις της και την αναβιβάζει σε επίπεδα ιδεών. Καθίσταται πρωτοπόρος του μαθηματικού στοχασμού, ανακαλύπτοντας νέες μαθηματικές θεωρίες και αρχές, που η εφαρμογή τους αποδείχθηκε διαχρονική. Το γνωστό σε όλους μας Πυθαγόρειο

θεώρημα -το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών- αντλεί από εκείνες τις εποχές την καταγωγή του. Αξιοσημείωτο επίσης είναι το ότι δε μελετούσαν τους αριθμούς αφηρημένα, αλλά χρησιμοποιούσαν χαλίκια, με τα οποία σχημάτιζαν διάφορα σχήματα και εξέταζαν τις μεταξύ τους ανακύπτουσες σχέσεις. Όταν, για παράδειγμα, αναφέρονταν στους τριγωνικούς αριθμούς, δεν έκαναν τίποτε άλλο από το να μελετούν το σχήμα που δημιουργείται από την τοποθέτηση των αριθμών, Δηλαδή,



Ο τριγωνικός αριθμός 10 είναι η περίφημη τετρακτύς, ο τέλειος αριθμός, σχηματιζόμενος από το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων $(1+2+3+4=10)$. Με τον ίδιο τρόπο μελετούσαν τους τετράγωνους αριθμούς, τους κύβους κ.λπ., καθώς επίσης αναζητούσαν τις συμμετρικές τους σχέσεις, τις αναλογίες τους. Οι ίδιοι ανακάλυψαν τους μαθηματικούς μέσους, δηλαδή τον αριθμητικό, το γεωμετρικό και τον αρμονικό.

Αλλά όλα τούτα δε θα είχαν ίσως ποτέ ανακαλυφθεί εάν οι αριθμοί δε συνδέονταν με έννοιες και ποιότητες. Όπως θα διαπιστωθεί και στο τρίτο βιβλίο του παρόντος έργου, οι αριθμοί δεν είναι ποσότητες απλώς, αλλά αντιπροσωπεύουν ιδέες και αρετές και κάθε συσχέτισή τους οδηγεί την ανθρώπινη διάνοια σε συνειδησιακές ανακαλύψεις. Μέσω αυτών παρέχεται μια δυνατότητα ανάπτυξης και βελτίωσης της ανθρώπινης οντότητας.

Στην ουσία οι Πυθαγόρειοι εξομοίωσαν ολόκληρη τη φύση με τους αριθμούς και υπέθεσαν ότι τα στοιχεία των αριθμών είναι στοιχεία όλων των όντων και όλος ο κόσμος είναι αρμονία και αριθμός.

Η έννοια της ψυχής ως αρμονίας είχε πολύ ισχυρή επίδραση στη φιλοσοφία των Πυθαγορείων. Αλλά αυτή την έννοια κατά κανένα τρόπο δεν την ταύτιζαν με την εξισορρόπηση των δυνάμεων του φυσικού τους σώματος, αλλά με τον αριθμό. Θεωρούσαν λοιπόν πως η αρμονία της ψυχής σχετίζεται με την τετρακτύν, τον τέλειο αριθμό. Δημιουργείται δε, μέσω της αρμονίας των πρώτων τεσσάρων αριθμών -1, 2, 3, 4- καθώς αυτοί είναι οι ενσαρκωτές της. Σε τέτοιες βεβαίως ιδέες στηρίχθηκαν και χρησιμοποίησαν το μαθηματικό τους υπόβαθρο στο πεδίο της μουσικής. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι εκείνα τα διαστήματα της μουσικής κλίμακας που ονομάζονται τέλειες αρμονίες, μπορούν να διατυπωθούν αριθμητικά ως αναλογίες μεταξύ των αριθμών 1, 2, 3, 4. Για παράδειγμα, η αναλογία δύο προς ένα μας δίνει την ογδόη ή τη δια πασών συμφωνία, όπως την αποκαλούσαν. Συνεπώς, επιβεβαίωσε με ακρίβεια ότι υφίσταται μια αριθμητική οργάνωση μέσα στην ίδια τη φύση του ήχου και κάτι τέτοιο δεν είχε να κάνει μόνο με τη μουσική που ακουγόταν από κάποιο όργανο, αλλά με το ίδιο το Σύμπαν. Διότι η μουσική εξέφραζε ακριβώς την υφιστάμενη συμπαντική αρμονία και ήταν ένα μέσο προσέγγισης της μέσω του ίδιου του κάλλους της.

Την αρμονία της τετρακτύος αναζήτησαν οι Πυθαγόρειοι και στον ουρανό, όπου διεπίστωσαν τις κανονικές κινήσεις των άστρων. Προκειμένου δε να δημιουργήσουν τη δεκάδα στο ηλιακό μας σύστημα, πρόσθεσαν και ένα δέκατο πλανήτη, την αντιχθόνα, που δεν είναι ορατή από τη γη. Διακήρυτταν λοιπόν ότι η κίνηση των ουράνιων σωμάτων σίγουρα είχε σαν αποτέλεσμα να βγαίνει κάποιος ήχος, αφού κάτι τέτοιο συμβαίνει και με τα σώματα στη γη. Και αφού οι αποστάσεις μεταξύ τους είναι αναλογικές, επόμενο ήταν ότι θα παράγεται μουσική και αποκαλούσαν το φθόγγο των άστρων εναρμόνιο. Ο Πυθαγόρας συνήθιζε να λέει πως αφουγκράζεται τη μουσική των ουράνιων σφαιρών και τον ακολούθησαν και αρκετοί άλλοι μεταξύ των Πυθαγορείων.

Η φιλοσοφία των Πυθαγορείων, λοιπόν, κινήθηκε σε ένα πολυδιάστατο επίπεδο. Χρησιμοποίησε τα μαθηματικά, τη

μουσική, την αστρονομία, αλλά και την ιατρική, καθώς οι πηγές αναφέρουν ότι έδιναν ιδιαίτερη σημασία στη φυσική αγωγή και τη δίαιτα, προκειμένου να διατηρούνται υγιείς. Η εφαρμογή της φιλοσοφίας τους ήταν όντως ένας πλήρης τρόπος ζωής και ασκούσαν ουσιαστικά την ψυχή τους προκειμένου να ταυτιστεί με την αρμονία του κόσμου.

Οι Πυθαγόρειοι όφειλαν να είναι σιωπηλοί και υπάκουοι, ενώ τα ανώτερά τους καθήκοντα ήταν σεβασμός προς το θείο, τους γονείς και το νόμο. Η μεταξύ τους συμπεριφορά στηριζόταν στη δικαιοσύνη αλλά όχι στην ισότητα, διότι αποδέχονταν την ύπαρξη μιας ιεραρχίας, στην οποία καθένας κατείχε την αρμόζουσα θέση.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
Σε τρία βιβλία

Περιέχει
Την Ουσία Όλων Όσων Έχουν Γραφτεί
Πάνω Στο Θέμα Από το Θέωνα το Σμυρναίο,
Το Νικόμαχο, Τον Ιάμβλιχο Και Το Βοήθιο
Μαζί με κάποιες Αξιοσημείωτες Λεπτομέρειες
Σχετικά με τους Τέλειους, Τους Φίλιους
Και Άλλους Αριθμούς, Που Δε θα Βρεθούν
Σε Κανένα Γραπτό Αρχαίου ή Σύγχρονου Μαθηματικού.
Επιπλέον, Ένα δείγμα Του Τρόπου Με Τον Οποίο
οι Πυθαγόρειοι Φιλοσοφούσαν Σχετικά Με
τους Αριθμούς· Και μια Ανάπτυξη Της Μυστικιστικής
Και Θεολογικής Αριθμητικής Τους.

Από Τον Τόμας Τέιλορ

«Πρέπει λοιπόν, Γλαύκων, να θεσπίσουμε δια νόμου αυτό το μάθημα (της αριθμητικής) και να πείσουμε αυτούς που θα διαχειρισθούν τα ανώτατα αξιώματα της πόλης να επιδίδονται στη λογιστική και να καταγίνονται με αυτή, όχι με ένα συνηθισμένο τρόπο, αλλά ως το βαθμό που να είναι ικανοί να γνωρίσουν με την καθαρή νόηση τη φύση των αριθμών, όχι για να τη χρησιμοποιούν βέβαια όπως οι έμποροι και οι καταστηματάρχες για τις αγοραπωλησίες τους, αλλά για να την εφαρμόζουν στα πολεμικά και να ευκολύνουν τις ενέργειες της ίδιας της ψυχής και τη στροφή της από τα φθαρτά στην αλήθεια και την ουσία (ή την αληθινή ύπαρξη)».

Πλάτωνας, *Πολιτεία,* Κεφ. 7, 525γ.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η φιλοσοφία, όπως κατάλληλα χαρακτηρίστηκε από τον Πλάτωνα και προσωπικά είμαι απόλυτα πεισμένος, είναι *το μεγαλύτερο αγαθό που δόθηκε ποτέ από τους θεούς στον άνθρωπο*[1]. Εκείνος που πασχίζει να τη σώσει από τη λήθη και να τη μεταδώσει στις μελλοντικές γενιές, πρέπει απαραίτητα να αγωνιστεί να ωφελήσει τη χώρα του και όλη την ανθρωπότητα στον πιο υψηλό βαθμό. Η επίτευξη αυτού του σπουδαίου σκοπού αποτελεί το στόχο του μεγαλύτερου μέρους της ζωής μου και η παρούσα εργασία γράφτηκε αποκλειστικά για την προώθηση του συγκεκριμένου σκοπού.

Ως αποτέλεσμα της λήθης στην οποία πραγματικά η φιλοσοφία έχει περιέλθει, μέσω της κατάργησης των σχολών της, οι μαθηματικές αρχές έχουν μελετηθεί με στόχο περισσότερο τις ανάγκες και τις ανέσεις μιας ζωής απλώς ζωώδους, παρά την αγαθή διάνοια από την οποία η ίδια μας η ύπαρξη και η ευδαιμονία συνίστανται. Έτσι, το πυθαγόρειο αίνιγμα «ένα σχήμα και ένα βήμα, αλλά όχι ένα σχήμα και τρεις οβολοί», έχει διαστραφεί εντελώς. Γιατί όλη η προσοχή εκείνων που έχουν εφαρμόσει τα μαθηματικά έχει στραφεί στους οβολούς και όχι στα βήματα της προόδου. Καθώς λοιπόν οι σκοποί τους υπήρξαν ταπεινοί, σέρνονται εκεί που θα έπρεπε να πετούν ψηλά. Για αυτό, επίσης, το μεγαλύτερο μάτι της ψυχής έχει τυφλωθεί και θαφτεί, «αν και», όπως παρατηρεί ο Πλάτωνας με λεπτότητα, «αυτό εξαγνίζεται και αναζωογονείται με τη σωστή μελέτη των επιστημών αυτών και αξίζει περισσότερο από δέκα χιλιάδες σωματικά μάτια, αφού η αλήθεια μόνο με αυτό γίνεται ορατή».

Η παρατήρηση τούτη ταιριάζει ιδιαίτερα στη θεωρητική αριθμητική, η μελέτη της οποίας έχει παραμεληθεί σχεδόν τελείως. Έχει εκτοπισθεί από την πρακτική αριθμητική, η οποία αν και είναι κατ' εξοχήν υποβοηθητική στον κοινό ωφελιμισμό και υποχρεωτικά αναγκαία στα καταστήματα και τα λογιστήρια, παρόλα αυτά δε δημιουργήθηκε κατά κανένα τρόπο για να εξαγνίσει, να αναζωογονήσει και να φωτίσει τη σκέψη, να την ανυψώσει από μια αισθητηριακή ζωή σε μια διανοητική προάγοντας έτσι το πιό αληθινό και υψηλό αγαθό του ανθρώπου. Πράγματι, ακόμη και η ίδια η γεωμετρία με όλο το σεβασμό που της τρέφω -αν και η θεωρία της μαθαίνεται *εν μέρει* από τα Στοιχεία του Ευκλείδη- δεν αποσκοπεί παρά στην απόκτηση γνώσης των άλλων τομέων των μαθηματικών που εξαρτώνται από αυτήν, όπως της αστρονομίας, της οπτικής, της μηχανικής κ.λπ., ή στο να γίνεις καλός κτίστης, τοπογράφος και τα παρόμοια. Δεν προσφέρει όμως έστω και μια ονειρική αντίληψη της πρώτης και πλέον ουσιώδους χρήσης της, εκείνης που επιτρέπει στο θιασώτη, σαν μια γέφυρα, να περάσει πάνω από το σκοτάδι της υλικής φύσης, όπως πάνω από μια σκοτεινή θάλασσα, στις φωτεινές περιοχές της τέλειας πραγματικότητας· ή καθώς το εκφράζει έξοχα ο Πλάτωνας, «για την περιαγωγή της ψυχής, για την επιστροφή της δηλαδή από μια νυχτερινή μέρα στην αληθινή της άϋλης ύπαρξης, που είναι η αληθινή φιλοσοφία η ίδια»[2].

Ανέφερα ότι η θεωρία της γεωμετρίας έχει μόνο *εν μέρει* μελετηθεί, γιατί το 10ο βιβλίο του Ευκλείδη, που αναφέρεται στις ασύμμετρες ποσότητες, καθώς και τα 13ο, 14ο και 15ο, που αναφέρονται στα πέντε κανονικά σχήματα, αν και παρέχουν ενδιαφέρουσες πληροφορίες, με όλη τη σημασία της λέξης, έχουν ως επί το πλείστον παραμεληθεί οικτρά, τουλάχιστον στη χώρα αυτή (σ.τ.μ. Αγγλία), επειδή ούτε προωθούν την αύξηση του εμπορίου που είναι ήδη πολύ εξαπλωμένο, ούτε συνεισφέρουν καθόλου στην παραπέρα ικανοποίηση της αισθητηριακής όρεξης ή στην απεριόριστη συσσώρευση πλούτου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν οι μαθηματικές επιστήμες, ιδιαίτερα η αριθμητική και η γεωμετρία, είχαν μελετηθεί με τέτοιο μεροληπτικό και αγενή τρόπο από τους συνετούς Έλληνες, δε θα είχαν ποτέ παρουσιάσει έναν Ευκλείδη, έναν Απολλώνιο, ή έναν Αρχιμήδη[3], άντρες που οδήγησαν τη γεωμετρία στο αποκορύφωμα της *επιστημονικής* τελειότητας και που τα έργα τους, όπως τα μνημεία της ελληνικής τέχνης, είναι τα πρότυπα με τα οποία η ανίερη μεγαλοφυία των σύγχρονων καιρών σχημάτισε όποια μαθηματική ανωτερότητα και αν κατέχει.

Ο ίδιος ο Νεύτωνας, όπως μπορεί να συμπεράνει κανείς από εκείνα που λέει για τον Ευκλείδη, πείσθηκε για τα παραπάνω όταν ήταν πολύ αργά και είχε αρχίσει τη μαθηματική του σταδιοδρομία μελετώντας μόνο εν μέρει τα έργα αυτών των πρωτοπόρων της γεωμετρίας. «Μιλούσε με λύπη», λέει ο δρ. Χάτον[4], «για το λάθος που διέπραξε στην αρχή των μαθηματικών σπουδών του, επικεντρωνόμενος στα έργα του Ντεκάρτ (Des Cartes) και των άλλων αλγεβρικών συγγραφέων[5] προτού να μελετήσει τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη με την προσοχή που τόσο άξιζε ως συγγραφέας».

Έχοντας ήδη αναφέρει τόσα πολλά, θα εκθέσω στη συνέχεια στον αναγνώστη κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την ουσία των μαθηματικών γενών και ειδών, καθώς και με τη χρησιμότητα, της μαθηματικής επιστήμης και την καταγωγή του ονόματος της, τις οποίες άντλησα από τα αξιοθαύμαστα σχόλια του Πρόκλου σχετικά με τον Ευκλείδη. Οι παρατηρήσεις αυτές θα διαφωτίσουν πολλά σημεία της εργασίας που ακολουθεί και μπορεί να οδηγήσουν την καλώς κείμενη σκέψη σε μια γνήσια μελέτη των μαθηματικών αρχών και από εκεί σε όλο το μεγαλείο της φιλοσοφίας του Πλάτωνα.

Ας συζητήσουμε λοιπόν το πρώτο θέμα. Εάν υποστηριχθεί ότι τα μαθηματικά σχήματα αντλούν την ύπαρξη τους από τα αισθητά, που είναι το δόγμα της σύγχρονης εποχής, ότι η ψυχή διαπλάθεται μέσω μιας δευτερογενούς γένεσης, ότι το κυκλικό ή το τριγωνικό σχήμα αντλούν την ύπαρξή τους από τους υλικούς κύκλους ή τρίγωνα, τότε από πού προέρχεται η ακρίβεια και η βεβαιότητα των ορισμών; Γιατί πρέπει αναγκαστικά να προέρχεται είτε από τα αισθητά είτε

από την ψυχή. Είναι όμως αδύνατον να απορρέει από τα αισθητά, γιατί αυτά βρίσκονται σε μια συνεχή ρευστότητα γένεσης και φθοράς και δε διατηρούν ούτε για μια στιγμή την ακριβή ομοιότητα της ύπαρξης, επομένως υπολείπονται κατά πολύ της ακρίβειας που περιέχουν οι ίδιοι οι ορισμοί. Θα πρέπει λοιπόν να προέρχονται από την ψυχή, η οποία δίνει τελειότητα σε πράγματα ατελή και ακρίβεια σε πράγματα ανακριβή. Γιατί πού ανάμεσα στα αισθητά θα βρούμε το αδιαίρετο, ή εκείνο που είναι χωρίς πλάτος ή βάθος; Πού θα βρούμε την ισότητα των γραμμών από ένα κέντρο, πού τις αιώνια σταθερές σχέσεις των λόγων και πού την ακριβή ορθότητα των γωνιών; Διότι κάθε διαιρετή φύση αναμιγνύεται με την άλλη και τίποτε σε αυτές δεν είναι πρωτότυπο, τίποτε δεν είναι ελεύθερο από το αντίθετο του, είτε διαχωρίζονται, είτε ενώνονται.

Πώς λοιπόν μπορούμε να αποδώσουμε αυτή την αναλλοίωτη ουσία των αμετάβλητων μορφών σε πράγματα που είναι μεταβλητά και που υφίστανται με διαφορετικό τρόπο σε διαφορετικούς χρόνους; Γιατί αυτό που αντλεί την ύπαρξή του από μεταβλητά στοιχεία, πρέπει αναγκαστικά να είναι μεταβλητής φύσης. Επίσης, πώς από πράγματα που δεν είναι ακριβή μπορούμε να λαμβάνουμε την ακρίβεια που χαρακτηρίζει τις άψογες μορφές; Γιατί οποιαδήποτε και να είναι η αιτία μιας μεταβλητής γνώσης, αυτή η ίδια είναι περισσότερο μεταβλητή από το αποτέλεσμά της. Πρέπει να γίνει επομένως παραδεκτό ότι η ψυχή είναι ο γεννήτορας των μαθηματικών σχημάτων και η πηγή των παραγωγικών αρχών που πληρούν τις μαθηματικές επιστήμες.

Αν όμως η ψυχή περιέχει τα παραπάνω ως παραδείγματα, τότε αυτή τους δίνει ουσιαστικά ύπαρξη και τα παραγόμενα δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι προβολές των μορφών που προϋπήρχαν μέσα σε αυτή. Επομένως θα ακολουθήσουμε το δόγμα του Πλάτωνα και θα ανακαλύψουμε την αληθινή ουσία των μαθηματικών αντικειμένων.

Αλλά αν η ψυχή, παρόλο που ούτε κατέχει ούτε περιέχει ως αιτία αυτές τις παραγωγικές αρχές, εν τούτοις συνθέτει τόσο υπέροχα μια άϋλη τάξη πραγμάτων και παράγει μια τό-

σο αξιοθαύμαστη θεωρία, *πως* θα είναι ικανή να κρίνει αν τα παράγωγα της είναι σταθερά η πράγματα που οι άνεμοι μπορεί να διασκορπίσουν, ότι είναι εικόνες μάλλον παρά πραγματικότητες; Τι κριτήριο μπορεί να χρησιμοποιήσει ως μέτρο της αλήθειας τους; Και πώς, αφού δεν κατέχει την ουσία τους, μπορεί να γεννά μιά τέτοια ποικιλία από αρχές παραγωγικές της αλήθειας; Διότι από μια τέτοια υπόθεση θα πλάσουμε την ύπαρξη τους τυχαία και όχι σε σχέση με κάποιο επιστημονικό πλαίσιο.

Επομένως, ερχόμαστε στο δεύτερο θέμα· αν όντως μέσω μιας καθοδικής πορείας και μέσω των αισθητών συλλέγουμε τις μαθηματικές αρχές, δεν πρέπει κατ' ανάγκη να πούμε ότι έξοχες αποδείξεις είναι αυτές που συντίθενται από τα αισθητά και όχι εκείνες που διαμορφώνονται πάντα από περισσότερο καθολικές και άϋλες μορφές; Διότι προκειμένου να ερευνήσουμε το παρόν θέμα, ισχυριζόμαστε ότι οι αιτίες πρέπει να είναι ανάλογες και συγγενείς προς τις αποδείξεις. Εάν επομένως, τα μερικά είδη είναι οι αιτίες των καθολικών και τα αισθητά είναι αντικείμενα της έλλογης δύναμης, γιατί το όριο της απόδειξης αναφέρεται πάντα σε αυτό που είναι περισσότερο καθολικό αντί σε εκείνο που είναι περισσότερο μερικό; Και πώς μπορούμε να δείξουμε ότι η ουσία των αντικειμένων της έλλογης δύναμης είναι περισσότερο συγγενής στις αποδείξεις από όσο είναι η ουσία των αισθητών; Διότι, όπως ισχυρίζεται ο Αριστοτέλης[6], δεν κατέχει γνήσια γνώση εκείνος που διδάσκει ότι τα ισοσκελή, τα ισόπλευρα ή τα σκαληνά τρίγωνα έχουν γωνίες ίσες προς δύο ορθές γωνίες, αλλά εκείνος που το αποδεικνύει αυτό για κάθε τρίγωνο, οπότε διαθέτει μια ουσιαστικά επιστημονική γνώση αυτής της πρότασης. Επιπλέον αναφέρει ότι τα καθολικά είναι ανώτερα από τα μερικά για το σκοπό της απόδειξης· ότι οι αποδείξεις αφορούν πράγματα περισσότερο καθολικά και ότι οι αρχές οι οποίες συγκροτούν τις αποδείξεις έχουν μια προτεραιότητα ύπαρξης και υπερέχουν στη φύση από τα μερικά και είναι οι αιτίες των πραγμάτων που αποδεικνύονται.

Επομένως, οι αποδεικτικές επιστήμες σε καμία περίπτωση δε συγκεντρώνουν τις αναμφισβήτητες προτάσεις τους από *πράγματα ύστερης καταγωγής* (*«υστερογενή* κοινά»)[7], ούτε από τα πλέον ασαφή αντικείμενα της αισθητηριακής αντίληψης.

Κατά τρίτον, οι πρωτεργάτες αυτής της υπόθεσης καθιστούν την ψυχή περισσότερο ποταπή από τα ίδια τα υλικά σχήματα. Υποστηρίζουν δηλαδή ότι η ύλη λαμβάνει από τη φύση πράγματα που είναι ουσιώδη και που έχουν ένα μεγαλύτερο βαθμό οντότητας και απόδειξης· ενώ η ψυχή αποσπά μέσω μιας ύστερης ενέργειας τις ομοιότητες και τις εικόνες αυτών των πραγμάτων από τα αισθητά και διαμορφώνει μέσα της μορφές που έχουν μια περισσότερο ταπεινή ουσία, λαμβάνοντας από την ύλη πράγματα που είναι εκ φύσεως αδιαχώριστα από αυτήν. Κατ' αυτόν τον τρόπο, όμως, δεν παρουσιάζουν την ψυχή περισσότερο ανεπαρκή και κατώτερη από την ίδια την ύλη; Διότι η ύλη είναι ο τόπος των υλικών παραγωγικών αρχών και η ψυχή είναι των άϋλων μορφών. Σύμφωνα όμως με την προαναφερθείσα υπόθεση, η ύλη θα ήταν ο αποδέκτης των πρωταρχικών, ενώ η ψυχή των δευτερευουσών μορφών. Η μια θα ήταν η έδρα των πραγμάτων που έχουν προτεραιότητα ανάμεσα στα όντα, ενώ η άλλη αυτών που διαμορφώνονται από αυτά· η πρώτη των πραγμάτων που έχουν ουσιαστική ύπαρξη, ενώ η δεύτερη εκείνων που υπάρχουν μόνο στην αντίληψη. Πώς, επομένως, μπορεί η ψυχή —η οποία συμμετέχει στη διάνοια, και την πρώτη νοητική ουσία, και η οποία από εκεί αντλεί γνώση και ζωή— να είναι ο δέκτης των πλέον ασαφών μορφών, των κατώτατων από την τάξη των πραγμάτων και να συμμετέχει στην πλέον ατελή ύπαρξη;[8]

Με κανέναν τρόπο λοιπόν δεν είναι η ψυχή ένας επίπεδος πίνακας, άδειος από παραγωγικές αρχές, αλλά αυτή είναι ένας πίνακας που γράφεται αέναα, χαράσσοντας η ίδια τα γράμματα πάνω της, μέσω των οποίων αντλεί μια αιώνια πληρότητα από τη διάνοια. Διότι η ψυχή είναι επίσης μια διάνοια που εξελίσσεται σύμφωνα προς μια προηγούμενη διάνοια, της οποίας είναι η εικόνα και η εξωτερική μορφή.

Αν επομένως διάνοια είναι όλα τα πράγματα διανοητικώς, η ψυχή θα είναι όλα τα πράγματα ψυχικώς· (ή κατά έναν τρόπο προσαρμοσμένο στην ψυχή), εάν η πρώτη είναι όλα τα πράγματα υποδειγματικώς, η δεύτερη είναι όλα τα πράγματα εικονικώς ή σύμφωνα με μια εικόνα· και εάν η πρώτη κατά τρόπο συστολής, η τελευταία με διαστολή και κατά τρόπο διαιρετικό. Αυτό αντιλαμβανόμενος ο Πλάτωνας συγκροτεί την ψυχή του κόσμου (στον *Τίμαιο)* από όλα τα πράγματα, τη διαιρεί σύμφωνα με τους αριθμούς, τη συνδέει με τις αναλογίες και τους αρμονικούς λόγους, εισάγει σε αυτήν τις βασικές αρχές των σχημάτων, την ευθεία και την κυκλική γραμμή και διανοητικά κινεί τους κύκλους που αυτή περιέχει. Άρα, όλες οι μαθηματικές μορφές έχουν μια αρχέτυπη υπόσταση στην ψυχή· καθώς προηγείται του αισθητού, περιέχει αυτοκινούμενους αριθμούς, ζωτικά σχήματα προηγούμενα αυτών που είναι προφανή, αρμονικούς λόγους προηγούμενους από τα εναρμονισμένα πράγματα και αόρατους κύκλους προηγούμενους των κυκλικώς κινούμενων σωμάτων. Η ψυχή είναι επίσης μια πληρότητα όλων των πραγμάτων και μιας διαφορετικής τάξης, όπου η ίδια αυτοπαράγεται και συγχρόνως είναι παραγόμενη από την προηγούμενη βασική αρχή της, πλημμυριζόμενη από ζωή και πληρούμενη από το δημιουργό της, ασώματα και αδιάλειπτα. Όταν συνεπώς παράγει τις λανθάνουσες αρχές της, φέρει στο φως όλες τις επιστήμες και τις αρετές.

Έτσι, η ψυχή γίνεται ουσιώδης μέσα σε αυτές τις μορφές, και ούτε πρέπει ο έμφυτος σε αυτήν αριθμός να θεωρηθεί σαν ένα πλήθος από μονάδες ή δεκάδες, ούτε πρέπει η ιδέα της ότι οι φύσεις διαστέλλονται με διαστήματα, να γίνει αντιληπτή υλικά· αλλά όλα τα πρότυπα φανερών αριθμών και σχημάτων, λόγων και κινήσεων, πρέπει να γίνει αποδεκτό ότι υπάρχουν μέσα σε αυτήν, ζωτικά και νοητικά, όπως διαμορφώνεται στον *Τίμαιο* του Πλάτωνα, ο οποίος ολοκληρώνει κάθε γένεση και δημιουργία της ψυχής από τις μαθηματικές μορφές, και σε αυτήν τοποθετεί τις αιτίες όλων των πραγμάτων.

Διότι τα επτά όρια[9] όλων των αριθμών προϋπάρχουν στην ψυχή σύμφωνα προς την αιτία. Και πάλι οι αρχές (πρώτες αιτίες) των σχημάτων είναι εδραιωμένες σε αυτήν κατά έναν τρόπο συγκροτημένο. Επίσης, η πρώτη από τις κινήσεις, αυτή που συμπεριλαμβάνει και κινεί όλες τις υπόλοιπες, συνυπάρχει με την ψυχή. Διότι ο κύκλος και η κυκλική κίνηση είναι οι αρχές κάθε ύπαρξης που κινείται. Επομένως, οι μαθηματικές παραγωγικές αρχές, που δίνουν την ολοκλήρωση στην ψυχή, είναι ουσιαστικές και αυτοκινούμενες· και η έλλογη δύναμη που υπερβαίνει και εξελίσσει αυτές, δίνει υπόσταση σε όλη την ποικιλία των μαθηματικών επιστημών. Ούτε και θα σταματήσει ποτέ αυτή να γεννά διαρκώς και να ανακαλύπτει τη μία επιστήμη μετά την άλλη, συνεπής προς τη διαστολή των αδιαίρετων μορφών που εμπεριέχει. Διότι αυτή είχε προγενέστερα δεχθεί όλα τα πράγματα αιτιωδώς και αυτή θα διεγείρει την ενέργεια σε όλα τα ποικίλα θεωρήματα, σύμφωνα με τη δική της απεριόριστη δύναμη, από τις βασικές αρχές που είχε προηγουμένως λάβει[10].

Σχετικά με την ωφελιμότητα της μαθηματικής επιστήμης, η οποία εκτείνεται από την πρωταρχική γνώση μέχρι το πλέον κατώτερο επίπεδο, πρέπει να παρατηρηθεί ότι ο *Τίμαιος* στον Πλάτωνα ονομάζει τη γνώση των μαθηματικών αρχών ατραπό της ευρυμάθειας, διότι τέτοια είναι η αναλογία της με την επιστήμη των πάντων, και την «πρώτη φιλοσοφία» ή μεταφυσική, όση έχει η ευρυμάθεια με την αρετή. Διότι η τελευταία προδιαθέτει την ψυχή για μια τέλεια ζωή με την κατάκτηση των αδιάφθορων τρόπων ενώ η πρώτη προετοιμάζει την έλλογη δύναμη και το μάτι της ψυχής για μιαν ανύψωση από την ασάφεια των αντικειμένων της αίσθησης. Έτσι ο Σωκράτης στην *Πολιτεία* σωστά λέει ότι «το μάτι της ψυχής που έχει τυφλωθεί και θαφτεί από άλλες μελέτες, είναι μοναδικά από τη φύση προσαρμοσμένο να αναζωογονείται και να συγκινείται από τις μαθηματικές αρχές». Και ακόμη ότι «αυτό οδηγείται από εκείνες προς το όραμα της αληθινής ύπαρξης και από τις εικόνες στις πραγματικότητες και μεταφέρεται από την καταχνιά στο διανοητικό φως, με δυο λόγια εκτείνεται από τις σπηλιές (μιας αισθητής ζωής) και

τα δεσμά της ύλης σε μια ασώματη και αδιαίρετη ουσία». Διότι η ομορφιά και η τάξη των μαθηματικών αιτιολογιών και η σταθερότητα της θεωρίας στις επιστήμες αυτές μας συνδέουν και μας τοποθετούν ανάμεσα στα νοητά αυτά που διαρκώς μένουν τα ίδια, που είναι περίλαμπρα από θεϊκή ομορφιά και διατηρούν μια αναλλοίωτη τάξη το ένα σε σχέση με το άλλο.

Αλλά στο *Φαίδρο* ο Σωκράτης μας παρουσιάζει τρεις χαρακτήρες που επαναφέρονται από μια αισθητή σε μια νοητή ζωή, το φιλόσοφο, τον εραστή και το μουσικό. Πραγματικά, για τον εραστή η αρχή και το μονοπάτι της ανύψωσης είναι μια πρόοδος από το πρόδηλο κάλλος, χρησιμοποιώντας ως βήματα σε τούτη την ανάβαση τις ενδιάμεσες μορφές όμορφων αντικειμένων. Αλλά στο μουσικό, στον οποίο έχει παραχωρηθεί η τρίτη τάξη, η μετάβαση συντελείται από την αρμονία των αισθητών στην αφανή αρμονία και στις παραγωγικές αρχές που υπάρχουν σε αυτά. Και στη μία και στην άλλη όψη, το άκουσμα είναι το όργανο για την αναθύμηση. Για εκείνον, ωστόσο, που είναι από τη φύση του φιλόσοφος, από πού και με τι μέσα συμβαίνει η αναθύμηση της νοητής γνώσης και η διέγερση προς την αληθινή ύπαρξη και την αλήθεια; Διότι και αυτός ο χαρακτήρας, εξαιτίας της ατέλειας του απαιτεί μία κατάλληλη αρχή, εφόσον στη φυσική αρετή έχει παραχωρηθεί ένα μάτι ατελές και μια ατελής συμπεριφορά. Εκείνος επομένως που είναι φύσει φιλόσοφος, παρακινείται πραγματικά από τον εαυτό του και μελετά με κατάπληξη την αληθινή ύπαρξη. Οπότε, λέει ο Πλωτίνος, θα πρέπει να μάθει τις βασικές αρχές των μαθηματικών επιστημών, ώστε να μπορέσει να εξοικειωθεί με μια φύση ασώματη και να οδηγηθεί στην παρατήρηση των αρχών όλων των πραγμάτων. Από τα παραπάνω καθίσταται φανερό ότι τα μαθηματικά προσφέρουν μέγιστη ωφέλεια στη φιλοσοφία.

Είναι αναγκαίο εν τούτοις να γίνω περισσότερο σαφής και να απαριθμήσω τις διάφορες επί μέρους συνεισφορές των μαθηματικών που αποδεικνύουν ότι μας προετοιμάζουν για τις νοητικές συλλήψεις της θεολογίας. Διότι αυτό που στις ατελείς φύσεις φαίνεται αληθινά δύσκολο και επίπονο,

όντας σχετικό με το θείο, οι μαθηματικές επιστήμες το αποδίδουν με εικόνες αξιόπιστες, έκδηλες και άψογες. Διότι με τους αριθμούς εμφανίζονται οι απεικονίσεις των πλέον ουσιωδών ιδιοτήτων και αποκαλύπτουν στα κατάλληλα σημεία του έλλογου κομματιού της φύσης μας τις δυνάμεις των νοητών σχημάτων. Ο Πλάτωνας μας διδάσκει πολλά θαυμαστά θεολογικά δόγματα μέσω μαθηματικών μορφών. Και η φιλοσοφία των Πυθαγόρειων, χρησιμοποιώντας τις ως πέπλα, κρύβει μέσω αυτών τη μυστική παράδοση θεϊκών δογμάτων. Διότι τέτοιος είναι ολόκληρος ο *Ιερός Λόγος*[11], όπως αναφέρει και ο Φιλόλαος στα *Βακχικά* του, καθώς και ολόκληρη η μέθοδος της πυθαγόρειας αφήγησης σχετικά με τους Θεούς. Αυτές οι επιστήμες προσφέρουν επίσης τα μέγιστα στη φυσική θεωρία, αποκαλύπτοντας τη διάταξη εκείνων των αρχών σύμφωνα με τις οποίες δημιουργήθηκε το σύμπαν. Η αναλογία συνενώνει κάθε πράγμα στον κόσμο, καθώς λέει ο *Τίμαιος*, συμφιλιώνει τις εχθρικές φύσεις, κάνει τα απόμακρα πράγματα οικεία δημιουργώντας συμπάθεια ανάμεσά τους, δημιουργεί απλά και πρωταρχικά στοιχεία· εν ολίγοις, διατηρεί τα πάντα σε συνοχή μέσω συμμετρίας και ισότητας. Μέσω αυτών ολόκληρο το σύμπαν τελειοποιείται, καθώς τα τμήματα του προσλαμβάνουν τα κατάλληλα σχήματα. Επίσης, η μαθηματική επιστήμη ανακαλύπτει αριθμούς που ταιριάζουν σε όλες τις δημιουργημένες φύσεις, στις περιόδους και τις επιστροφές τους στην πρωταρχική κατάσταση, μέσω των οποίων μπορούμε να συνάγουμε τη γονιμότητα και τη στειρότητα του καθενός. Διότι ο *Τίμαιος* του Πλάτωνα, οπουδήποτε υποδεικνύει αυτά τα επί μέρους, εκθέτει με μαθηματικούς όρους τη θεωρία σχετικά με τη φύση των συνόλων, κοσμεί τη γένεση των στοιχείων με αριθμούς και σχήματα, αναφέρεται σε αυτά, στις δυνάμεις τους, στις παθητικές ποιότητες και επιδράσεις τους και προσδιορίζει ως αιτία όλων των ποικίλων μεταλλαγών την οξύτητα και την αμβλύτητα των γωνιών, την ομαλότητα ή τραχύτητα των πλευρών, το πλήθος ή την έλλειψη των στοιχείων.

Δε θα πρέπει επίσης να πούμε ότι (η μαθηματική επιστήμη) συνεισφέρει πολλά και με έναν αξιοθαύμαστο τρόπο στη

φιλοσοφία που ονομάζεται πολιτική; Δεν είναι αυτή που υπολογίζει τους χρόνους των πράξεων, τις διάφορες περιόδους του σύμπαντος και τους αριθμούς που ταιριάζουν στις γενεές, δηλαδή την εξομοίωση και τις αιτίες του ανόμοιου, τους παραγωγικούς και τους τέλειους, και τους αντίθετους σε αυτούς, εκείνους που παρέχουν μια αρμονική και εκείνους που δίδουν μια άστατη και άκομψη ζωή, και με δύο λόγια, εκείνους που είναι οι πηγές της γονιμότητας και της στειρότητας; Αυτά αποκαλύπτει ο λόγος των Μουσών στην *Πολιτεία* του Πλάτωνα, υποστηρίζοντας ότι ολόκληρος ο *«γεωμετρικός αριθμός»*[12] είναι η αιτία των καλύτερων και των χειρότερων γενεών, της αδιάσπαστης μονιμότητας των αδιάφθορων τρόπων και της μεταβολής των καλύτερων πολιτευμάτων σε τέτοια που είναι παράλογα και γεμάτα σύγχυση. Επιπλέον, η μαθηματική επιστήμη μας τελειοποιεί στην ηθική φιλοσοφία εισάγοντας στους τρόπους μας την τάξη και μια εκλεπτυσμένη ζωή και απελευθερώνοντας εκείνα τα σχήματα, τις μελωδίες και τις κινήσεις που αρμόζουν στην αρετή, μέσω των οποίων ο Αθηναίος συνδαιτυμόνας του Πλάτωνα εύχεται να τελειοποιηθούν εκείνοι που έχουν σκοπό να αποκτήσουν ηθική αρετή από τη νεότητα τους. Επίσης, θέτει ενώπιον μας τις αρχές της αρετής, κατά ένα τρόπο με αριθμούς, κατά δεύτερο με σχήματα και κατά έναν τρίτο με μουσικές συμφωνίες, και εκθέτει τις υπερβολές και τις ελλείψεις των ελαττωμάτων, μέσω των οποίων μπορούμε να βάζουμε μέτρο και να κοσμούμε τους τρόπους μας. Σχετικά με τούτο ο Σωκράτης —στο *Γοργία*— κατηγορώντας τον Καλλικλή για άμετρη και έκλυτη ζωή, λέει σε αυτόν. «Παραγνωρίζεις τη γεωμετρία και τη γεωμετρική ισότητα». Αλλά στην Πολιτεία ανακαλύπτει το ενδιάμεσο ανάμεσα στην τυραννική και τη βασιλική ηδονή, σύμφωνα με μια επίπεδη και στερεή γενεά[13].

Επιπλέον, θα γνωρίσουμε τη μεγάλη ωφέλεια που άλλες επιστήμες και τέχνες αντλούν από τα μαθηματικά, αν θεωρήσουμε, όπως ο Σωκράτης λέει στο Φίληβο, ότι όλες οι τέχνες απαιτούν αριθμητική, καταμέτρηση και στατική· όλα δηλαδή που γίνονται κατανοητά με την μαθηματική επιστήμη

και συνδέονται μεταξύ τους με τις αρχές που αυτή περιέχει. Διότι η κατανομή των αριθμών, η ποικιλία των μετρήσεων και η διαφορά των βαρών, γίνονται γνωστά μέσω αυτής της επιστήμης. Για το νοήμονα αναγνώστη, επομένως, η ωφέλεια συνολικά των μαθηματικών στη φιλοσοφία και σε άλλες επιστήμες και τέχνες θα είναι, βάσει όλων αυτών που ειπώθηκαν, προφανής.

Εντούτοις, κάποιοι επιδιώκουν να ανατρέψουν τη μεγαλοπρέπεια της μαθηματικής επιστήμης αποστερώντας της την ομορφιά και το αγαθό, επειδή δεν τα ανάγει σε θέματα συζήτησης. Άλλοι προσπαθούν να αποδείξουν ότι τα αισθητά πειράματα είναι περισσότερο ωφέλιμα από τα καθολικά αντικείμενα που εξετάζει αυτή, όπως για παράδειγμα, η γεωδαισία, από τη γεωμετρία, η πρακτική αριθμητική από αυτήν που περιέχεται σε θεωρήματα, η ναυτιλιακή αστρονομία από αυτήν που εξηγεί τα παγκόσμια. Διότι, καθώς λένε, δε γινόμαστε πλούσιοι από τη γνώση μας για τα πλούτη, αλλά από τη χρήση τους· δε γινόμαστε ευτυχισμένοι από τη γνώση της ευτυχίας, αλλά με το να ζούμε ευτυχισμένα. Άρα, πρέπει να ομολογήσουμε ότι όχι τα θεωρητικά αλλά τα πρακτικά μαθηματικά συνεισφέρουν στην ανθρώπινη ζωή και τις πράξεις. Διότι αυτοί που αγνοούν τις αιτίες των πραγμάτων, αλλά έχουν εμπειρία στα μερικά, ξεπερνούν από κάθε άποψη, ως προς ό,τι είναι ωφέλιμο στη ζωή του ανθρώπου, εκείνους που ασχολούνται μόνο με τη θεωρία.

Σε αντιρρήσεις λοιπόν αυτού του είδους θα απαντήσουμε προβάλλοντας την ομορφιά των μαθηματικών επιστημών με εκείνα τα επιχειρήματα που χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης. Τρία πράγματα έχουν σε αξιοσημείωτο βαθμό ως αποτέλεσμα την ομορφιά στα σώματα και τις ψυχές: η *τάξη,* η *συμμετρία* και η *σαφήνεια.* Γιατί πραγματικά, η δυσμορφία στο σώμα προκαλείται από υλική ασυμμετρία, έλλειψη μορφής και κυριαρχία του ασαφούς πάνω στο σύνθετο σώμα. Αλλά η αναξιότητα της ψυχής πηγάζει από την μετακίνηση του άλο-

* Η επιστήμη κατανομής της γης (Σ.τ.μ.).

γου μέρους της με τρόπο συγκεχυμένο και ακατάστατο, από την ασυμφωνία αυτοί με τη λογική και τη μη αποδοχή από αυτήν του σωστού ορίου. Επομένως η ομορφιά έχει την ουσία της στα αντίθετα αυτών, δηλαδή στην τάξη, στη συμμετρία και σε αυτό που είναι ορισμένο. Αυτά, όμως, μπορούμε να τα μελετήσουμε στον ύψιστο βαθμό μέσω της μαθηματικής επιστήμης· τάξη, πραγματικά, στην αέναη έκθεση πραγμάτων ύστερων και περισσότερο ποικίλων από εκείνα που είναι αρχικά και περισσότερο απλά. Διότι τα πράγματα που ακολουθούν, εξαρτώνται πάντοτε από εκείνα που προηγούνται- τα πρώτα σχετίζονται με μιαν αρχή, αλλά τα τελευταία με πράγματα που ακολουθούν τις πρώτες υποθέσεις. Και μπορούμε να αντιληφθούμε τη συμμετρία στη συμφωνία των πραγμάτων που εκδηλώνονται το ένα προς το άλλο και τη σχέση όλων αυτών με τη διάνοια. Διότι διάνοια είναι το μέτρο όλης της επιστήμης, από όπου αυτή λαμβάνει τις αρχές της, και προς την οποία στρέφει τους σπουδαστές. Και το ορισμένο φαίνεται στα αιωνίως σταθερά και αναλλοίωτα αντικείμενα της θεωρίας της. Διότι τα υποκείμενα της γνώσης της δεν ποικίλλουν σε διαφορετικούς χρόνους, όπως τα αντικείμενα της γνώμης και της αίσθησης, αλλά παρουσιάζονται απαράλλακτα ίδια και συνδέονται με διανοητικές μορφές. Αν επομένως αυτά τα μερικά έχουν στον ύψιστο βαθμό ως αποτέλεσμα την ομορφιά, ενώ οι μαθηματικές επιστήμες χαρακτηρίζονται από αυτά, είναι φανερό ότι σε αυτές υφίσταται η ομορφιά. Πραγματικά, πώς είναι δυνατόν να μην είναι έτσι η κατάσταση, με μια επιστήμη που άνωθεν φωτίζεται από τη διάνοια, προς την οποία τείνει και προς την οποία σπεύδει να μας μεταφέρει από την ασαφή πληροφορία της αίσθησης;

Αλλά οφείλουμε να κρίνουμε την ωφελιμότητά της, χωρίς να λάβουμε υπόψη τις ανάγκες και τις διευκολύνσεις της ανθρώπινης ζωής. Για αυτό πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι η αρετή του στοχασμού από μόνη της είναι ανώφελη, εφόσον διαχωρίζεται από τα ανθρώπινα ενδιαφέροντα, προς τα οποία δεν έχει τάση, ούτε έχει την παραμικρή επιθυμία να τα καταστήσει αντικείμενα της γνώσης της. Ο Σωκράτης στο

Θεαίτητο, αναφερόμενος στους κορυφαίους φιλοσόφους, ή εκείνους που φιλοσοφούσαν με τον πιο εξαίρετο τρόπο, λέει ότι αυτοί, μέσω της διανοητικής ενέργειας, διαχωρίζονται από κάθε κατάσταση συνήθη στην ανθρώπινη ζωή και από την προσοχή στις ανάγκες και τις επιθυμίες της, διευρύνοντας την έλλογη δύναμη της ψυχής χωρίς εμπόδιο στο στοχασμό των αληθινών όντων. Η μαθηματική επιστήμη, επομένως, πρέπει να θεωρηθεί ως επιθυμητή για αυτό που είναι και για το στοχασμό που παρέχει, και όχι σε σχέση με την ωφέλεια που προσφέρει στα ανθρώπινα ενδιαφέροντα. Αν, ωστόσο, ήταν απαραίτητο να αναφέρουμε την ωφέλεια της σε κάτι άλλο, θα πρέπει να αναφερθεί σε σχέση με τη διανοητική γνώση. Διότι η πρώτη μας οδηγεί στη δεύτερη και προετοιμάζει το μάτι της ψυχής για τη γνώση των άϋλων συνόλων, εξαγνίζοντας το και απομακρύνοντας τα εμπόδια που προκαλούνται από τα αισθητά αντικείμενα. Όπως επομένως, δε λέμε ότι ολόκληρη η καθαρτική ή εξαγνιστική αρετή είναι χρήσιμη ή το αντίθετο, εξετάζοντας την ωφελιμότητα της αισθητής ζωής, αλλά παρατηρώντας τα πλεονεκτήματα της στοχαστικής ζωής, έτσι ταιριάζει και να αναφέρουμε το σκοπό της μαθηματικής επιστήμης σε σχέση με τη διάνοια και το σύνολο της σοφίας. Κατά συνέπεια, η ενέργεια σχετικά με αυτήν αξίζει την πλέον σοβαρή προσοχή μας, τόσο χάριν της ιδίας όσο και χάριν μιας διανοητικής ζωής.

Είναι επίσης φανερό, όπως λέει ο Αριστοτέλης, ότι αυτή η επιστήμη είναι επιθυμητή από μόνη της στους πιστούς της, επειδή αν και καμία αμοιβή δεν προτάθηκε στους μελετητές της, εν τούτοις, σε σύντομο χρόνο η μαθηματική θεωρία γνώρισε τόσο μεγάλη ανάπτυξη. Επιπλέον, όλοι οι άνθρωποι που έχουν και στον ελάχιστο βαθμό εμπειρία της ωφέλειας της, την επιδιώκουν ηθελημένα και επιθυμούν να έχουν ελεύθερο χρόνο για το σκοπό αυτό, παραμελώντας κάθε άλλο ενδιαφέρον. Εκείνοι λοιπόν που περιφρονούν τη γνώση των μαθηματικών, δεν έχουν γευτεί τις ηδονές που περιέχουν. Η μαθηματική επιστήμη, συνεπώς, δεν πρέπει να καταφρονείται επειδή το θεωρητικό μέρος της δε συνεισφέρει στην ανθρώπινη ωφέλεια, καθόσον οι ύψιστες πρόοδοι της, και ε-

κείνες που ενεργοποιούνται σε συνδυασμό με την ύλη, στοχεύουν σε ένα τέτοιο πλεονέκτημα. Αντιθέτως, θα έπρεπε να θαυμάζουμε την αϋλότητά της και το αγαθό που η ίδια εμπεριέχει. Όταν δηλαδή οι άνθρωποι αποδεσμεύτηκαν εντελώς από τη φροντίδα για τα αναγκαία ενδιαφέροντα, αφυπνίστηκαν και στράφηκαν προς τη μελέτη των μαθηματικών αρχών και αυτό με τη μεγαλύτερη πραγματικά ευπρέπεια. Διότι τα πράγματα με τα οποία ανατραφήκαμε και τα οποία είναι συγγενή με τα αισθητά αντικείμενα, απασχόλησαν πρώτα την προσοχή του ανθρώπινου γένους και κατόπιν εκείνα τα ενδιαφέροντα που ελευθερώνουν την ψυχή από μια αισθητή ζωή και προάγουν την ανάμνηση της αληθινής ύπαρξης. Κατά αυτόν τον τρόπο επομένως, επιδιώκουμε τα αναγκαία πρωτύτερα από εκείνα που είναι αξιοτίμητα από μόνα τους, καθώς και τα συναφή με τα αισθητά πρωτύτερα από εκείνα που γίνονται κατανοητά μέσω διανοητικής ενέργειας. Διότι η ζωή της ανθρώπινης ψυχής είναι εκ φύσεως κατάλληλη να προχωρά από το ατελές προς την τελειότητα. Και με τον τρόπο αυτό απαντήσαμε επαρκώς σε εκείνους που περιφρονούν τη μαθηματική επιστήμη.

Σχετικά τώρα με το όνομα των μαθηματικών, ο Πρόκλος υποστηρίζει ότι μια τέτοια ονομασία της επιστήμης που γνωρίζει τα αντικείμενα της έλλογης δύναμης, δεν επινοήθηκε, όπως πολλά ονόματα, από τυχαία πρόσωπα, αλλά —καθώς λέγεται— από τους Πυθαγόρειους. Αυτοί αντιλήφθηκαν ότι το σύνολο εκείνου που ονομάζεται μάθησις, είναι ανάμνηση[14] που δεν εισήλθε στις ψυχές από έξω, όπως τα φαντάσματα των αισθητών αντικειμένων εντυπώνονται στη φαντασία, ούτε συμπτωματικά, όπως η γνώση που είναι αποτέλεσμα γνώμης, αλλά διεγειρόμενη πραγματικά από τα προφανή πράγματα και μέσα από την έλλογη δύναμη εξερχόμενη, μετατράπηκε σε αυτό που είναι. Ομοίως, αυτοί (οι Πυθαγόρειοι) είδαν ότι αν και η ανάμνηση μπορεί να καταδειχθεί από αρκετά επί μέρους, εντούτοις αυτή φανερωνόταν με τον ύψιστο τρόπο, όπως λέει και ο Πλάτωνας[15], από τη μαθηματική ευταξία. Διότι αν οποιοσδήποτε, λέει, οδηγηθεί στα διαγράμματα, θα αποδείξει εύκολα από αυτά ότι η ευταξία

είναι ανάμνηση. Επίσης, ο Σωκράτης στο *Μένωνα* δείχνει με τούτο τον τρόπο επιχειρηματολογίας ότι το *μανθάνειν* δεν είναι τίποτε άλλο από το να *ενθυμηθεί* η ψυχή τις παραγωγικές αρχές που περιέχει. Αλλά αυτό είναι -καθώς το αντικείμενο της ενθύμησης είναι η συλλογιστική ενέργεια της λογικής- που αποκτά ουσία στις αρχές των μαθηματικών και που αιτιωδώς εμπεριέχει τις μαθηματικές επιστήμες, αν και μπορεί να μην ενεργεί σύμφωνα με αυτές. Περιέχει λοιπόν (η ψυχή) όλα αυτά ουσιαστικά και απόκρυφα· ωστόσο, φέρνει καθένα τους στο φως, όταν ελευθερωθεί από τα εμπόδια που πηγάζουν από την αίσθηση. Διότι οι αισθήσεις συνδέουν την ψυχή με διαιρετά αντικείμενα, οι φαντασιώσεις τη γεμίζουν με σχηματοποιημένες κινήσεις και οι ορμές εφελκύουν προς αυτή μια παθητική ζωή. Όμως κάθε πράγμα διαιρετό είναι ένα εμπόδιο στο διάλογο με τον εαυτό μας, καθετί που έχει μορφή σκιάζει την άμορφη γνώση και οτιδήποτε παθητικό είναι ένα εμπόδιο στη μη παθητική ενέργεια. Όταν επομένως έχουμε απομακρύνει όλα αυτά από την αναιτιώδη δύναμη της λογικής, τότε θα είμαστε ικανοί να μάθουμε από αυτήν τις παραγωγικές αρχές που εμπεριέχει, οπότε θα γίνουμε επιστημονικοί στην ενέργεια και θα ασκήσουμε την ουσιαστική γνώση μας. Όσο όμως είμαστε δέσμιοι και έχουμε το μάτι της ψυχής κλειστό, ποτέ δε θα αποκτήσουμε την κατάλληλη τελειότητα για τη φύση μας. Η μάθηση, επομένως, είναι η ενθύμηση των αιώνιων παραγωγικών αρχών που είναι έμφυτες στην ψυχή· και η μαθηματική επιστήμη είναι υπό αυτήν την έννοια η γνώση που συνεισφέρει στην ενθύμηση τούτων των αρχών. Άρα, η χρήση αυτής της επιστήμης είναι πρόδηλη από το όνομα της. Διότι είναι κίνητρο γνώσης, διεγείρει τη νοημοσύνη, εξαγνίζει την αναιτιώδη ενέργεια της λογικής, αποκαλύπτει τις μορφές που ουσιαστικά περιέχουμε, απομακρύνει τη λήθη και την άγνοια που αντλούμε από τις περιοχές της αίσθησης και λύνει τα δεσμά με τα οποία κρατιόμαστε σε αιχμαλωσία από την άλογη φύση.

Η επικουρία επίσης των μαθηματικών στη φιλοσοφία επεξηγείται έξοχα από το Θέωνα το Σμυρναίο, ο οποίος συ-

γκρίνει την παράδοση αυτών με τη μύηση στα μυστήρια και δείχνει ότι αυτές οι *αρχές* αντιστοιχούν στον εξαγνισμό που ήταν αναγκαίος πριν από τη μύηση. Αναφέρει[16] σχετικά με αυτό το θέμα: «Επιπλέον, μπορεί να ειπωθεί ότι η φιλοσοφία είναι η μύηση και η παράδοση των πραγματικών και αληθινών μυστηρίων. Υπάρχουν όμως πέντε στάδια στη μύηση. Εκείνο που προέχει πραγματικά και είναι το πρώτο, είναι ο εξαγνισμός. Διότι τα μυστήρια δε μεταδίδονται σε όλους όσους θα ήθελαν, αλλά κάποια πρόσωπα αποκλείονται με την φωνή του κήρυκα, τέτοια όπως εκείνα που τα χέρια τους δεν είναι αγνά και που ο λόγος τους είναι άναρθρος. Είναι επίσης απαραίτητο εκείνοι που δεν αποκλείσθησαν από τη μύηση, να υποστούν προηγουμένως κάποιον εξαγνισμό. Το δεύτερο στάδιο μετά τον εξαγνισμό είναι η παράδοση του μυστηρίου. Το τρίτο ονομάζεται *εποπτεία* ή επιθεώρηση[17]. Και το τέταρτο, που είναι ο σκοπός της εποπτείας, είναι το δέσιμο του κεφαλιού και η τοποθέτηση των στεμμάτων επάνω του, ώστε αυτός που μυείται είναι πλέον ικανός να μεταδώσει σε άλλους τα μυστήρια που έλαβε, ανεξάρτητα από το αν είναι το μυστήριο του δαδούχου ή η ερμηνεία των ιερών τελετών, ή κάποιο άλλο ιερατικό αξίωμα. Αλλά το πέμπτο στάδιο, που είναι αποτέλεσμα των παραπάνω, είναι η ευδαιμονία που απορρέει από το γεγονός ότι είσαι αγαπητός στη θεότητα και η σύνδεση με τους Θεούς. Όμοια με τα παραπάνω είναι η παράδοση των πολιτικών δογμάτων. Αρχικά είναι απαραίτητος κάποιος εξαγνισμός, τέτοιος όπως η άσκηση από τη νεανική ηλικία στις κατάλληλες αρχές. Αναφέρει ο Εμπεδοκλής: «Είναι αναγκαίο να εξαγνιστείς από το μίασμα αντλώντας νερό από πέντε πηγές σε ένα δοχείο από καθαρό χαλκό». Ο δε Πλάτωνας λέει ότι ο εξαγνισμός πρέπει να απορρέει από πέντε κανόνες· αυτοί είναι αριθμητική, γεωμετρία, στερεομετρία, μουσική και αστρονομία. Η παράδοση των φιλοσοφικών, λογικών, πολιτικών και φυσικών θεωρημάτων είναι όμοια με την μύηση. Ο Πλάτωνας ονομάζει την ενασχόληση με τα νοητά, τα αληθινά όντα και τις ιδέες, *εποπτεία* ή επιθεώρηση. Και η ικανότητα που αποκτάται από την καθοδήγηση άλλων στην ίδια θεωρία, πρέπει

να θεωρηθεί ανάλογη με το δέσιμο της κεφαλής και το στεφάνωμά της. Αλλά το πέμπτο και το τελειότερο πράγμα είναι η ευδαιμονία που προέρχεται από αυτά, καθώς και, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, μια όσο το δυνατόν εξομοίωση με το Θεό.

Τέτοια λοιπόν είναι η ωφέλεια που προκύπτει από τη σωστή μελέτη των μαθηματικών επιστημών, ανάμεσα στις οποίες η θεωρητική αριθμητική, όπως παρουσιάζεται στο πρώτο μέρος αυτού του έργου, είναι προεξέχουσα και οδηγός των υπόλοιπων.

Πιστεύω επομένως ότι οι φιλοπρόοδοι αναγνώστες μου, οι οποίοι δεν αποσκοπούν στην ικανοποίηση των ορέξεων, ούτε σε μια άμετρη συσσώρευση πλούτου, θα δεχτούν με ευγνωμοσύνη το παρόν έργο, ως άλλη μια ανιδιοτελή προσπάθεια ενός ανθρώπου που πάσχισε όσο κανείς άλλος στους σύγχρονους καιρούς να ευεργετήσει τους συνανθρώπους του με τη διάδοση της πιο θαυμαστής γνώσης. Δεν έχει λάβει τίποτε ως ανταπόδοση από τους σύγχρονους κριτικούς, εκτός από κατάφωρη διαστρέβλωση και μοχθηρή κακομεταχείριση· οτιδήποτε δηλαδή, η εχθρική ζηλοφθονία μπορούσε να αποδώσει για δυσφημιστικούς σκοπούς και οτιδήποτε η πανουργία της κακοήθους σοφιστείας μπορούσε να διαστρεβλώσει. Αλλά, όπως έχει άλλοτε τονίσει, παρηγορείται για όλες τις συκοφαντίες που έχει δεχθεί, ή μπορεί ακόμη να δοκιμάσει, από τη συνείδηση της εντιμότητας του σκοπού του και από την ακλόνητη ελπίδα πως ό,τι έχει γράψει κατά καιρούς προς όφελος των άλλων, θα συναντήσει την έγκριση των συνετών και αγαθών. Συμφωνεί δε απόλυτα με το Σενέκα ότι «αν ένας άνθρωπος εύχεται να είναι ευτυχισμένος, θα πρέπει πρώτα να λάβει υπόψη του ότι πρέπει να καταφρονήσει και να καταφρονεθεί»[18]. Ιδιαιτέρως πιστεύει ότι τούτο το έργο θα αποβεί ωφέλιμο για δύο νεαρούς ευγενείς της χώρας του, τον Ουίλιαμ Ντέι (William Day) και τον Ουίλιαμ Τζορτζ Μέρεντιθ (William George Meredith), τους συγγενείς των πολύ σεβαστών και άξιων εκτίμησης φίλων του, Ουίλιαμ και Τζορτζ Μέρεντιθ. Ο Ουίλιαμ Ντέι είναι ανηψιός και των δύο, ενώ ο Ουίλιαμ Τζόρτζ Μέρεντιθ είναι γιος

του δεύτερου. Όλοι όσοι τους γνωρίζουν, δίκαια ελπίζουν και προσδοκούν, λόγω της ιδιαίτερης ικανότητας τους στη μάθηση, ότι τελικά θα είναι τόσο ένα στολίδι για τη χώρα τους, όσο και τιμή στην οικογένεια τους. Επιθυμεί λοιπόν να του επιτρέψουν να αφιερώσει το παρόν έργο σε εκείνους, τόσο ως κατάθεση ευγνωμοσύνης προς τους προαναφερθέντες συγγενείς τους, όσο και ως ένδειξη της μεγάλης προσωπικής του εκτίμησης για αυτούς και των αισιόδοξων προοπτικών του ένδοξου μέλλοντός τους.

Όσον αφορά το ίδιο το έργο, στο πρώτο και δεύτερο βιβλίο και στις πρόσθετες σημειώσεις, περιέλαβα ό,τι μου φάνηκε σημαντικότερο από τα αριθμητικά γραπτά του Νικόμαχου, του Θέωνα, του Ιάμβλιχου και του Βοήθιου[19]. Αυτοί είναι οι μόνοι διασωζόμενοι αρχαίοι συγγραφείς που όντως έχουν γράψει για τη Θεωρητική Αριθμητική. Στην πραγματικότητα έχω παραθέσει το σύνολο σχεδόν του έργου του Βοήθιου, τόσο διότι έχει γράψει με περισσότερη σαφήνεια πάνω στο θέμα αυτό από τους άλλους, όσο και επειδή —καθώς ο Φαμπρίκιος σωστά συμπεραίνει— αυτός φαίνεται ότι είχε κάνει χρήση ενός σημαντικότερου αριθμητικού έργου του Νικόμαχου, το οποίο δε διασώθηκε.

Το τρίτο βιβλίο προστέθηκε από εμένα με σκοπό να δείξω τον τρόπο με τον οποίο οι Πυθαγόρειοι φιλοσοφούσαν σχετικά με τους αριθμούς και να αποκαλύψω όσο είναι δυνατόν τη μυστική και θεολογική αριθμητική τους. Θεώρησα ότι μια τέτοια προσθήκη ήταν απαραίτητη για την ολοκλήρωση της θεωρίας των αριθμών. Επίσης, ο αναγνώστης θα ανακαλύψει κάποια πράγματα εντελώς καινούρια. Αν σε οποιοδήποτε σημείο έχω παρουσιάσει ως δική μου επινόηση κάτι που ανακαλύφθηκε από άλλους, πιστεύω ότι ο αναγνώστης θα το αποδώσει στην εντρύφηση μου περισσότερο στους αρχαίους παρά στους σύγχρονους συγγραφείς και όχι σε πρόθεση να στερήσω από άλλους τις δίκαιες διεκδικήσεις τους.

Τέλος, επιθυμώ να προσθέσω, για χάρη του ευρύνοος αναγνώστη, το ακόλουθο απόσπασμα από την εισαγωγή μου στη μετάφραση που έκανα στο έργο του Αριστοτέλη *Μετά*

τα *Φυσικά.* Έχει σχέση με τη στοχαστική ή διανοητική ενέργεια, με την ενασχόληση του ανώτερου μέρους της φΰσης μας.

Ο Αριστοτέλης αποκαλεί τη μεταφυσική επιστήμη, άλλοτε *σοφία,* άλλοτε *πρώτη φιλοσοφία* και άλλοτε *θεολογία,* εννοώντας, με καθεμία από τις ονομασίες αυτές, ότι αυτή δε συγκαταλέγεται σε εκείνες τις τέχνες και επιστήμες που εντρυφούν στη γνώση των αναγκαίων πραγμάτων, ή που ερευνούν πράγματα τα οποία είναι προς όφελος και τη διευκόλυνση της θνητής ζωής, αλλά είναι μια γνώση και επιστήμη που πρέπει να επιδιωχθεί για τη δική της αξία και που διερευνά τις πρώτες αρχές και αιτίες των πραγμάτων —διότι αυτές είναι όντα στον υψηλότατο βαθμό. Στο έκτο βιβλίο του *Ηθικά Νικομάχεια,* ορίζει τη σοφία ως την ακριβέστερη από τις επιστήμες, την επιστήμη των πιο αξιότιμων πραγμάτων, δηλαδή των αρχών, και ως το αποκορύφωμα όλων των μαθήσεων.

Πραγματικά, καθώς η πλειοψηφία των ανθρώπων κυριαρχείται από τις αισθήσεις, οτιδήποτε δε συνεισφέρει στην πρόοδο της απλής ζωώδους ζωής, θεωρείται ανάξιο. Ως εκ τούτου, από το καλύτερο μέρος του κόσμου παρατηρείται με αδιαφορία και από το μεγαλύτερο με περιφρόνηση. Είναι μάταιο να μιλήσεις σε τέτοιους ανθρώπους για ένα αγαθό καθαρά πνευματικό, το οποίο είναι ανεξάρτητο από την τύχη και τη μοίρα, το οποίο είναι επιθυμητό για αυτό που είναι και το οποίο παρέχει την αγνότερη και διαρκέστερη ευδαιμονία στον κάτοχό του. Αλήθεια, ποιο πάθος μπορεί να ικανοποιήσει; Ποια αίσθηση μπορεί να γοητεύσει; Αγνοώντας την τεράστια διαφορά ανάμεσα στα αναγκαία και σε αυτά που είναι εξόχως αγαθά, εκλαμβάνουν τα μέσα ως σκοπούς, επιδιώκουν τις φευγαλέες παρωδίες της ύπαρξης, διότι τέτοιες είναι όλες οι αισθητές φύσεις, και εις μάτην προσπαθούν να αρπάξουν τα φαντάσματα της ευτυχίας.

Οι αντιλήψεις του εμπειρικού φιλόσοφου που προσδοκά να ανακαλύψει την Αλήθεια μέσα στους λαβύρινθους της ύλης, δεν είναι —όσον αφορά αυτό το θέμα— περισσότερο ευγενικές από αυτές του άξεστου. Αγνοεί ότι η Αλήθεια εί-

ναι το πιο λαμπρό από όλα τα πράγματα, ότι αυτή είναι η συνεχής συντροφιά της Θεότητας και προχωρά μαζί της μέσα στο σύμπαν, ότι τα αστραφτερά ίχνη από τα πόδια της είναι απλώς ορατά στη *μορφή* και ότι στους σκοτεινούς έλικες της *ύλης* αυτή δεν άφησε παρά την πιο σκοτεινή και εφήμερη ομοιότητα του εαυτού της. Αυτό το απατηλό φάντασμα, εν τούτοις, εξερευνά μανιωδώς ο άνθρωπος της σύγχρονης επιστήμης, μην έχοντας συνείδηση ότι τρέχει μέσα σε βαθύ σκοτάδι και άπειρη πολυπλοκότητα, ότι σπεύδει πίσω από ένα αντικείμενο που διαφεύγει κάθε ανίχνευση και εμπαίζει κάθε αναζήτηση.

Έχει σωστά ειπωθεί από τον Αριστοτέλη ότι σοφία είναι η επιστήμη των αρχών και των αιτιών, αφού εκείνος που τις γνωρίζει, γνωρίζει επίσης τα αποτελέσματα που πηγάζουν από αυτές. Τόσο κάποιος γνωρίζει τα μερικά όσο αυτά κατανοούνται μέσα στα καθολικά. Η γνώση αυτή είναι ανώτερη από εκείνη που είναι μερική και εναρμονισμένη με ένα μερικό αντικείμενο. Δηλαδή καθετί δεν ενεργεί με αρμόζοντα τρόπο, όταν ενεργεί σύμφωνα με τη δική του δύναμη και φύση; Για παράδειγμα, η φύση σύμφωνα με την τάξη της ουσίας της, δεν ενεργεί με τρόπο φυσικό και δε νοεί κατά τρόπο νοητικό; Αν γίνει αυτό παραδεκτό, έπεται ότι η γνώση υφίσταται σύμφωνα με τη φύση εκείνου που γνωρίζει και όχι σύμφωνα με τη φύση του αντικείμενου της γνώσης. Τα μερικά, επομένως, όταν εξετάζονται ως περιεχόμενα των αιτιών τους, τότε γίνονται γνωστά με τον πιο εξαιρετικό τρόπο αυτή είναι η ιδιαιτερότητα της διανοητικής αντίληψης και μοιάζει —αν είναι θεμιτό να μιλήσουμε έτσι— με τη γνώση της ίδιας της Θεότητας. Διότι η ύψιστη αντίληψη που μπορούμε να σχηματίσουμε από τη γνώση της, είναι ότι η Θεότητα γνωρίζει όλα τα πράγματα με έναν τέλειο τρόπο που ταιριάζει στη φύση της· δηλαδή, τα διαιρετά πράγματα με τρόπο αδιαίρετο, τα πολλαπλά με τρόπο ομοιόμορφο, τα δημιουργημένα σύμφωνα με μια αιώνια διάνοια, με τρόπο καθολικό οτιδήποτε είναι μερικό. Η Θεότητα γνωρίζει τα αισθητά χωρίς να διαθέτει αισθήσεις και, χωρίς να παρίσταται σε πράγματα που κατέχουν θέση στο χώρο, τα γνωρίζει όλα

πριν από κάθε τοποθέτηση στο χώρο και αποδίδει στο καθένα εκείνο που είναι ικανό να λάβει. Η ασταθής ουσία, επομένως, των φανερών φύσεων δε γίνεται γνωστή με ασταθή αλλά με ορισμένο τρόπο· ούτε και γνωρίζει το μεταβαλλόμενο με αβέβαιο τρόπο, αλλά με έναν αιωνίως ίδιο. Έχοντας η Θεότητα αυτογνωσία, γνωρίζει κάθε πράγμα του οποίου είναι αιτία, κατέχοντας μια γνώση υπέρμετρα ακριβή από εκείνη που ταιριάζει στα αντικείμενα της γνώσης. Επομένως, για να γνωρίσει τις αισθητές φύσεις δεν της λείπει η αίσθηση, η γνώμη, ή η επιστήμη- γιατί αυτή είναι που παράγει όλα τούτα και που —στα απύθμενα βάθη της διάνοιας της— κατανοεί μια ενιαία γνώση αυτών σύμφωνα με την αιτία και με μια απλότητα αντίληψης.

Η σοφία, επομένως, θεωρούμενη ως αιτιώδης γνώση των μερικών, μοιάζει με τη γνώση της Θεότητας και συνεπώς είναι η πλέον αξιότιμη και έξοχη. Άρα, ο σοφός άνθρωπος, λόγω ομοιότητας, πρέπει να είναι φίλος της Θεότητας. Ως εκ τούτου, εξαίρετα παρατηρείται από τον Αριστοτέλη ότι «Ο άνθρωπος που ενεργεί σύμφωνα με τη διάνοια και διάκειται νοητικά κατά τον καλύτερο τρόπο, είναι ο πιο αγαπητός στη Θεότητα. Διότι αν δίνεται κάποια προσοχή από τους Θεούς στις ανθρώπινες υποθέσεις, καθώς φαίνεται, είναι επίσης λογικό να υποθέσουμε ότι αυτοί θα τέρπονται με το πλέον εξαιρετικό και το περισσότερο σχετικό με αυτούς, δηλαδή τη διάνοια. Επιπλέον, θα επιβραβεύουν εκείνους που την αγαπούν ιδιαίτερα και την τιμούν, καθώς φροντίζουν εκείνο που είναι αγαπητό στους Θεούς και δρουν σωστά και καλά[20].

Πράγματι, η στοχαστική ή διανοητική ενέργεια, όταν κατέχεται στην υψηλότερη τελειότητα που η φύση μας είναι ικανή, ανυψώνει τον κάτοχό της πάνω από την κατάσταση της ανθρωπότητας. «Μια ζωή σύμφωνη προς τη διάνοια», λέει ο Σταγειρίτης, «είναι περισσότερο εξαίρετη από εκείνη που τυχαίνει στη μοίρα του ανθρώπου- διότι αυτός κατά συνέπεια δε ζει σαν άνθρωπος, αλλά με τρόπο που να περιέχει κάτι θεϊκό. Και όσο αυτό το θεϊκό μέρος του διαφέρει από το σύνθετο, τόσο επίσης αυτή η ενέργεια διαφέρει από εκείνη των άλλων αρετών. Αν, επομένως, η διάνοια συγκρινόμε-

νη με τον άνθρωπο είναι θεϊκή, τότε η ζωή που είναι σύμφωνη με τη διάνοια, θα είναι θεϊκή σε σχέση με την ανθρώπινη ζωή. Είναι εν τούτοις αναγκαίο να μην ακολουθήσουμε τις νουθεσίες εκείνων που λένε ότι ο άνθρωπος πρέπει να είναι σοφός στα ανθρώπινα και θνητός στα θνητά ενδιαφέροντα, αλλά πρέπει να λαχταράμε όσο το δυνατόν περισσότερο να καταστήσουμε αθάνατους τους εαυτούς μας και να πράττουμε καθετί που μπορεί να συνεισφέρει σε μια ζωή σύμφωνη με το πιο εξαίρετο μέρος μας. Διότι αυτό, αν και μικρό σε όγκο, υπερβαίνει κατά πολύ όλα τα άλλα μέρη σε δύναμη και αξιοπρέπεια». Κατόπιν παρουσιάζει τη διάνοια ως τον αληθινό άνθρωπο, καθώς είναι ό,τι πιο δυνατό, ανώτερο και εξαιρετικό στη φύση μας· «έτσι ώστε», λέει, «θα ήταν ανόητο να μη διαλέξουμε αυτό που αποτελεί την αρμόζουσα για μας ζωή, αλλά εκείνο που ανήκει σε κάτι διαφορετικό από τους εαυτούς μας».

Γελοίες, επομένως, αλλά και χαμερπείς είναι εκείνες οι αντιλήψεις που οδηγούν τους ανθρώπους να εκτιμούν τη γνώση μόνο καθόσον αυτή συνεισφέρει στα αναγκαία, τις ανέσεις και τις βελτιώσεις μιας ζωής απλώς ανθρώπινης. Μερικός και αντιεπιστημονικός είναι ο ορισμός της αρετής, που θεωρεί ως ύψιστες ενέργειες της εκείνες της ηθικότητας· γιατί η ηθική αρετή είναι περισσότερο ανθρώπινη, αλλά η διανοητική περισσότερο θεϊκή. Η πρώτη είναι προπαρασκευαστική για την ευδαιμονία· αλλά η τελευταία, όταν τελειοποιείται, συνοδεύεται από το τέλειο κάλλος. Ενάρετος, επομένως, είναι ο άνθρωπος που ανακουφίζει τις σωματικές ανάγκες των άλλων, που σκουπίζει το δάκρυ της λύπης και γαληνεύει την αγωνία· αλλά περισσότερο ενάρετος είναι εκείνος που, διαδίδοντας τη σοφία, διώχνει την άγνοια από την ψυχή και με τον τρόπο αυτό ευεργετεί το αθάνατο μέρος του ανθρώπου. Μπορεί λοιπόν πράγματι να ειπωθεί ότι εκείνος που δεν έχει καν γνώση των κοινών πραγμάτων είναι άξεστος ανάμεσα στους ανθρώπους· ότι εκείνος που έχει ακριβή γνώση των ανθρώπινων ενδιαφερόντων μόνο, είναι άνθρωπος ανάμεσα σε άξεστους· αλλά ότι εκείνος που γνω-

ρίζει όλα όσα μπορούν να μαθευτούν από τη διανοητική ενέργεια, είναι ένας Θεός ανάμεσα στους ανθρώπους[21].

Σοφά, επομένως, ο Πλάτωνας διαβεβαιώνει ότι ο φιλόσοφος δεν πρέπει να κατέρχεται στα κατώτερα είδη και ότι οφείλει να ασχολείται μόνο με το στοχασμό των *συνόλων* και των *καθολικών.* Διότι όποιος κατεβαίνει κάτω από αυτά, πέφτει στα Κιμμέρεια βασίλεια και στον ίδιο τον Άδη, περιπλανάται ανάμεσα σε φαντάσματα κενά από νου και κινδυνεύει να αντικρύσει την πραγματική Γοργώ, ή το φρικτό πρόσωπο της Ύλης και έτσι να απολιθωθεί από έναν κορεσμό ανόητων παθών.

Η ζωή του ανθρώπου που, κατέχοντας την αληθινή σοφία, ενεργεί σύμφωνα με τη θεωρητική αρετή, περιγράφεται αξιοθαύμαστα από τον Πλάτωνα στο *Θεαίτητο* ως εξής:

«*Σωκράτης:* Ας μιλήσουμε, αφού κι εσύ συμφωνείς, για τους κορυφαίους. Γιατί τι να πει κανείς για εκείνους που περνούν τον καιρό τους στη φιλοσοφία κατά τρόπο φαύλο; Κατ' αρχάς, λοιπόν, οι κορυφαίοι από μικροί δε γνωρίζουν ούτε το δρόμο προς την αγορά, ούτε πού βρίσκεται το δικαστήριο ή το βουλευτήριο, ούτε κάποιος άλλος δημόσιος τόπος συγκέντρωσης της πόλης. Ούτε ακούν, ούτε βλέπουν τους νόμους ή τα ψηφίσματα, όταν συζητούνται ή εκδίδονται. Όσον αφορά δε τις διακαείς προσπάθειες των πολιτικών συλλόγων να καταλάβουν αξιώματα, τις συγκεντρώσεις αυτών, τα δείπνα και τα γλέντια που συνοδεύονται από αυλητρίδες, όλα αυτά ούτε καν ονειρεύονται ότι τα κάνουν. Εάν δε κάτι καλό ή κακό έχει συμβεί στην πόλη, ή ποιο κακό κληρονόμησε κάποιος από τους προγόνους του, άνδρες ή γυναίκες, σε αυτά είναι περισσότερο αδαείς, όπως λέγεται, παρά στο πόσους κουβάδες νερό έχει η θάλασσα. Και επιπλέον, ένας τέτοιος άνθρωπος δε γνωρίζει ούτε την άγνοια του[22] σχετικά με όλα τούτα, γιατί δεν απέχει από αυτά για να αποκτήσει φήμη, αλλά στην πραγματικότητα μόνο το σώμα του κατοικεί και ζει στην πόλη, ενώ η διάνοια του (επιστημονικώς αποκαλούμενη έλλογη δύναμη —σ.τ. συγγρ.), θεωρώντας όλα αυτά επουσιώδη και ανάξια, πετά ολούθε, σύμφωνα με τον Πίνδα-

ρο, στα βάθη της γης, μετρώντας τις εκτάσεις της, στα ύψη του ουρανού αστρονομώντας[23]. Και ερευνά τέλεια τη φύση των όντων που κάθε σύνολο περιέχει, χωρίς καθόλου να έχει σχέση ο ίδιος με οτιδήποτε κοντινό.

Θεόδωρος: Τι εννοείς με αυτό, Σωκράτη;

Σωκράτης: Ακριβώς αυτό, Θεόδωρε, που λένε για το Θαλή, που παρατηρούσε τα άστρα με το κεφάλι ψηλά γυρισμένο και έπεσε σε ένα πηγάδι. Και κάποια έξυπνη και χαριτωμένη Θρακιώτισσα υπηρέτρια αναφέρεται πως του είπε ότι επιθυμούσε πολύ να μάθει τι περιέχουν οι ουρανοί, αλλά αγνοούσε αυτά που βρίσκονταν μπροστά του, κοντά στα πόδια του. Το ίδιο πείραγμα ταιριάζει σε όλους όσους περνούν τη ζωή τους φιλοσοφώντας. Αληθινά, ένας τέτοιος άνθρωπος δεν αγνοεί μονάχα τι κάνει ο γείτονας του, αλλά μόλις και μετά βίας γνωρίζει αν αυτός είναι άνθρωπος, ή κάποιο άλλο ζώο. *Τι όμως είναι ο άνθρωπος και τι θα έπρεπε μια τέτοια φύση να κάνει ή να υποφέρει, αυτά ερευνά εκείνος και μελετά σοβαρά*[24]. *Καταλαβαίνεις, Θεόδωρε, ή όχι;*

Θεόδωρος: Καταλαβαίνω˙ και σίγουρα έχεις δίκιο.

Σωκράτης: Γιατί, στην πραγματικότητα, φίλε μου, όταν ένας τέτοιος άνθρωπος υποχρεωθεί να μιλήσει (καθώς είπα προηγουμένως) είτε σε ιδιωτική συναναστροφή, είτε δημόσια σε ένα δικαστήριο ή οπουδήποτε αλλού, σχετικά με πράγματα που βρίσκονται μπροστά στα πόδια του και στα μάτια του, προκαλεί γέλιο, όχι μόνο σε Θρακιώτισσες υπηρέτριες, αλλά και σε όλο τον κόσμο, αφού από την αδεξιότητα του πέφτει μέσα σε πηγάδια και κάθε είδους ασάφεια. Η ανικανότητα του επίσης είναι φοβερή και τον κάνει να θεωρείται αγροίκος. Όταν βρίσκεται σε συντροφιά συκοφαντών, δεν έχει καμιά κακολογία να πει, καθώς δε γνωρίζει τίποτε κακό για κανένα, *επειδή δεν έχει καταστήσει αντικείμενα της προσοχής τον τα άτομα.* Μην έχοντας λοιπόν τίποτε να πει, εμφανίζεται γελοίος. Όταν πάλι βρίσκεται σε συντροφιά ανθρώπων που τιμούν και επαινούν τους άλλους, καθώς δεν είναι μόνο σιωπηλός αλλά και γελάει ολοφάνερα, θεωρείται

ανόητος. Όταν ακούει εγκώμια για ένα τύραννο ή ένα βασιλιά, νομίζει ότι ακούει να εγκωμιάζεται κάποιος βοσκός χοίρων, βοδιών ή προβάτων, επειδή αρμέγει πολλά ζώα· και πιστεύει ότι αυτοί τρέφουν και αρμέγουν το ζώο που βρίσκεται κάτω από τις εντολές τους, με ένα δυσκολότερο και δολιότερο τρόπο· και ότι τέτοιου είδους άνθρωποι δεν είναι κατ' ανάγκην καθόλου λιγότερο αγροίκοι και απαίδευτοι από τους ποιμένες λόγω της ενασχόλησης τους, ο ένας όντας περιχαρακωμένος σε τείχη, ο άλλος σε μια στάνη σε ένα βουνό. Αλλά όταν ακούει οποιονδήποτε να διακηρύσσει ότι κατέχει δέκα χιλιάδες πλέθρα γης ή ακόμη περισσότερα σαν να κατείχε πλήθος θαυμάσια πράγματα, νομίζει ότι ακούει επουσιώδη πράγματα, επειδή είναι συνηθισμένος να βλέπει ολόκληρη τη γη. Συχνά επίσης, όταν κάποιος υμνεί την ευγενική καταγωγή της οικογένειας του, προβάλλοντας εφτά παππούδες πλούσιους, νομίζει ότι ο έπαινος γίνεται από άνθρωπο με θαμπό μάτι, κοντόφθαλμο, ο οποίος εξαιτίας της έλλειψης πειθαρχίας, είναι ανίκανος να βλέπει το σύνολο πάντα και να συμπεραίνει λογικά ότι κάθε άνθρωπος έχει αναρίθμητες μυριάδες παππούδες και προγόνους, ανάμεσα στους οποίους συχνά υπάρχουν πλούσιοι και φτωχοί, βασιλείς και σκλάβοι, βάρβαροι και Έλληνες. Όταν δε κάποιος υμνώντας τους προγόνους του, απαριθμεί είκοσι πέντε από αυτούς και ανάγει την καταγωγή του στον Ηρακλή, το γιο του Αμφιτρύωνα, εκείνος το θεωρεί ανάξιο λόγου. Γελά με αυτούς, επειδή δεν μπορούν να υπολογίσουν ότι ο εικοστός πέμπτος πρόγονος του Αμφιτρύωνα είχε και αυτός την τύχη που του έλαχε, το ίδιο και ο πεντηκοστός αυτού, και να απαλλάξουν έτσι τον εαυτό τους από τη χαυνότητα της ανόητης ψυχής τους. Σε τέτοια πράγματα, ο κορυφαίος που περιγράφουμε θα γελοιοποιηθεί από τους πολλούς, εν μέρει επειδή θα θεωρηθεί από αυτούς αλαζόνας και εν μέρει επειδή αυτός αγνοεί και δυσπιστεί για πράγματα που βρίσκονται μέσα στα πόδια του.

Θεόδωρος: Μιλάς, ω Σωκράτη, για πράγματα που σίγουρα συμβαίνουν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σωκράτης: Όταν όμως αυτός, φίλε μου, τραβήξει κάποιον στα ψηλά και είναι πρόθυμος κάποιος να εγκαταλείψει τη σκέψη του «εάν εγώ αδικώ εσένα, ή εσύ εμένα», και τον ακολουθήσει στην έρευνα του δίκαιου και του άδικου, τι είναι το καθένα από αυτά και σε τι διαφέρουν από όλα τα άλλα πράγματα ή μεταξύ τους· ή εγκαταλείποντας τη σκέψη «αν ο βασιλιάς είναι ευτυχισμένος επειδή κατέχει άφθονο χρυσάφι», να ανυψωθεί στην έρευνα της βασιλείας και γενικά της ανθρώπινης ευτυχίας και δυστυχίας, τι είδους είναι το καθένα και με ποιο τρόπο είναι σωστό για την ανθρώπινη φύση να αποκτήσει το ένα από τα δυο, να ξεφύγει από το άλλο· σχετικά με όλα αυτά τα μερικά, όταν αυτός ο μικρόψυχος, ο δριμύς και δικολάβος, αναγκαστεί να δώσει μια λογική αιτία, τότε αυτός με τη σειρά του επηρεάζεται χειρότερα από τον κορυφαίο. Ζαλίζεται, επειδή αιωρείται σε ένα υψηλό τόπο έρευνας και επειδή δεν είναι εξοικειωμένος να κοιτάζει τόσο ψηλά. Επίσης τρομοκρατείται, γεμίζει αβεβαιότητα και μιλάει κατά τρόπο βαρβαρικό· έτσι ώστε πράγματι δεν προκαλεί γέλιο στην αγενή Θρακιώτισσα, ούτε σε κάποιο άλλο ανεκπαίδευτο πρόσωπο (διότι αυτοί δεν αντιλαμβάνονται την κατάσταση του), αλλά σε όλους εκείνους που η παιδεία τους υπήρξε αντίθετη από εκείνη των δούλων. Αυτή, Θεόδωρε, είναι η συμπεριφορά του καθένα· ο ένας, που τον αποκαλούμε φιλόσοφο, ανατρέφεται πράγματι, με την αλήθεια και τη «σχολή». Αυτός, αν και δεν θα έπρεπε να κατηγορείται, εμφανίζεται ως ηλίθιος και εντελώς ανάξιος όταν εμπλέκεται σε δουλικές υπηρεσίες· αφού ούτε γνωρίζει να συσκευάζει μια κουβέρτα, ούτε να φτιάξει νόστιμα φαγητά για δείπνα, ούτε να συνθέσει κολακευτικούς λόγους. Αλλά ο άλλος από αυτούς τους χαρακτήρες είναι ικανός να εκτελεί όλες αυτές τις δουλικές υπηρεσίες με ταχύτητα και άνεση, μα δε γνωρίζει ούτε να ντυθεί με τρόπο που ταιριάζει σε ελεύθερο άνθρωπο, ούτε να υμνήσει κατάλληλα, με αρμονική γλώσσα, την αληθινή ζωή των θεών και των ευλογημένων ανθρώπων».

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Οι Πυθαγόρειοι ήταν τόσο βαθιά πεισμένοι για την αλήθεια αυτού του ισχυρισμού, ώστε ένας από αυτούς παρατηρεί θαυμάσια: των κατά φιλοσοφίαν θεωρημάτων απολαυστέον έφ' όσον οίον, καθάπερ αμβροσίας και νέκταρος ακήρατόν τε γάρ τό άπ' αυτών ηδύ καί θείον, τό μεγαλόψυχον δύναται τε ποιείν, καί εί μή αϊδίους αϊδίων τε επιστήμονας (Ίάμβλιχος, *Προτρεπτικός ες Φιλοσοφίαν,* σ.4)· δηλαδή: «Τα θεωρήματα της φιλοσοφίας πρέπει να απολαμβάνονται όσο το δυνατόν περισσότερο, σαν να ήταν αμβροσία και νέκταρ. Γιατί η ευχαρίστηση που προσφέρουν είναι άφθαρτη και θεϊκή. Έχουν την ικανότητα να προσφέρουν τη μεγαλοψυχία και μολονότι δεν μπορούν να μας κάνουν αθάνατους, όμως μας καθιστούν ικανούς να αποκτήσουμε επιστημονική γνώση των αθάνατων φύσεων».
2. *«τούτο δή ώς έοικεν, ουκ οστράκου αν εϊη περιστροφή, αλλά ψυχής περιαγωγή, εκ νυκτερινής τινός ημέρας εις άληθινήν του όντος έπάνοδον, ήν δή φιλοσοφίαν αληθή φήσομεν είναι».* Πλάτωνα, *Πολιτεία,* Βιβλίο 7.
3. Ο Πλούταρχος, στη βιογραφία του Μαρκέλλου, μας πληροφορεί ότι ο λόγος για τον οποίο ο Αρχιμήδης δεν καταδέχτηκε να αφήσει καμιά γραπτή αναφορά για τις θαυμαστές μηχανές που επινοούσε, ήταν επειδή «θεωρούσε την ενασχόληση με τη μηχανική και γενικά κάθε τέχνη που σχετίζεται με τις κοινές ανάγκες της ζωής αγενή και ανελεύθερη· και ότι αντικείμενα της φιλοδοξίας του ήταν εκείνα μόνο με τα οποία η ομορφιά και η ανωτερότητα ήταν παρούσες, μη αναμεμιγμένες με το αναγκαίο». («Άλλα την περί τα μηχανικά πραγματείαν, καί πασαν όλως τέχνην χρείας εφαπτομένην, αγενή και βάναυσον ήγησάμενος, εκείνα καταθέσθαι μόνα την αυτού φιλοτιμίαν, οίς τό καλόν καί περιττόν αμιγές του αναγκαίου πρόσεστιν».)

   Η μεγάλη ακρίβεια και λεπτότητα των διδασκαλιών του Ευ-

κλείδη και του Αρχιμήδη, που ισάξιες *τους* δεν έχουν διατυπωθεί από κανέναν από τους μεγαλύτερους συγχρόνους μαθηματικούς, οφείλονται στη βαθιά πίστη τους στη σημαντική αυτή αλήθεια. Αντίθετα οι σύγχρονοι μαθηματικοί, προφανώς αγνοώντας τη και φροντίζοντας μόνο για τις ανάγκες και τις ευκολίες της ζωώδους ζωής του ανθρώπου -σαν να ήταν μοναδικός σκοπός του η ικανοποίηση των αισθήσεων του- έχουν διαφθείρει τη γνήσια γεωμετρία αναμιγνύοντας την με αλγεβρικούς υπολογισμούς. Όντας πρόθυμοι να την υποβιβάσουν όσο το δυνατόν περισσότερο σε πρακτικούς σκοπούς, έχουν αναζητήσει εναγωνίως περισσότερο τη σύνοψη και την ευκολία παρά την ακρίβεια και τη λεπτότητα της γεωμετρικής διδασκαλίας.

4. Βλέπε το λήμμα Νεύτων (Newton) στο *Μαθηματικό Λεξικό* του Χάτον.

5. Επίσης, ο Δρ. Χάλεί (Halley), ο οποίος αναμφισβήτητα συγκαταλέγεται ανάμεσα στους σπουδαιότερους σύγχρονους μαθηματικούς, φαίνεται να είχε την ίδια άποψη για την υπερβατικότητα του ελληνικού πνεύματος στις μαθηματικές επιστήμες. Στον πρόλογο της μετάφρασης του *Περί Χωρίου Αποτομής* του Απολλώνιου (στο οποίο απέδιδε τόση σημασία ώστε ήταν πρόθυμος να μάθει Αραβικά για να ολοκληρώσει τη μετάφρασή του στα Λατινικά) λέει: «Methodus haec cum algebra speciosa facilitate contendit, evidentia vero et demonstrationum elegantia earn longe superare videtur: ut abunde constabit, si quis conferat hanc Apollonii doctrinam de Sectione Rationis cum ejusdem Problematis Analysi Algebraica, quam exhibuit clarissimus Wallisius, torn. 2· Operum Math. cap. 54, p. 220»· δηλαδή: «Η μέθοδος αυτή συναγωνίζεται την ευπρεπή άλγεβρα με ευκολία. Απέχει όμως πολύ από το να την ξεπεράσει στην απόδειξη και τη λεπτότητα της διδασκαλίας, καθώς θα γίνει φανερό, αν αυτό το δόγμα του Απολλώνιου στο Περί *Χωρίου Αποτομής* συγκριθεί με την αλγεβρική ανάλυση του ίδιου προβλήματος που ο ξακουστός Ουάλις εκθέτει στο δεύτερο τόμο των μαθηματικών έργων του, κεφ. 54, σελ. 220». Και στην κατάληξη του προλόγου του παρατηρεί: «Verum perpendendum est, aliud esse problema aliqualiter resolutum dare, quod modis varus plerumque fieri potest, aliud methodo elegantissima ipsum efficere: analysi brevissima et simul perspicua; synthesi concinna, et minima operosa»· δηλαδή: «Άλλο πράγμα είναι να δίνεις τη λύση

ενός προβλήματος με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, η οποία κατά το μεγαλύτερο μέρος μπορεί να κατορθωθεί πολλαπλώς, και άλλο είναι να επιτυγχάνεις τη λύση με την πιο λεπτή μέθοδο, με τη συντομότερη ανάλυση που είναι συγχρόνως και σαφής, με μια σύνθεση καλαίσθητη και στο μικρότερο βαθμό κοπιαστική».

6. Στα *Ύστερα Αναλυτικά* του.

7. Αυτά τα *«υστερογενή κοινά»* ονομάζονται στη σύγχρονη γλώσσα *«αφηρημένες ιδέες»*. Το δόγμα λοιπόν του Λοκ (Locke) πά-. νω στο θέμα αυτό ήταν αρκετά γνωστό στον Πρόκλο· αλλά η υπόθεση ότι η ψυχή δεν έχει άλλες ιδέες εκτός από αυτές, σωστά αποδείχθηκε εσφαλμένη από τον ίδιο και από τους σημαντικότερους Πλατωνιστές.

8. Εκτός από τα παραπάνω έξοχα επιχειρήματα του Πρόκλου, θα παρουσιάσω στον αμερόληπτο αναγνώστη αυτά που ο Συριανός, ο δάσκαλος του Πρόκλου, αναφέρει ως προς το ίδιο θέμα στα ερμηνευτικά του σχόλια πάνω στο 13ο βιβλίο από το *Μετά τα Φυσικά* του Αριστοτέλη και που έχουν ως εξής: «Ούτε βλέπουμε όλες τις μορφές, ούτε όλους τους αριθμούς που περιέχονται στα αισθητά, ούτε είναι δυνατόν πράγματα που προέρχονται από τα αισθητά να έχουν μαθηματική ακρίβεια και βεβαιότητα. Αλλά εάν μπορούσε να ειπωθεί πως προσθέτουμε ό,τι απαιτείται, προκειμένου τα αφηρημένα να γίνουν περισσότερο καθορισμένα, τότε κατ' αυτόν τον τρόπο τα εξετάζουμε. Πραγματικά, είναι απαραίτητο αρχικά να προσδιορίσουμε από πού αντλούμε τη δύναμη που παρέχει την τελειοποίηση. Διότι δε θα βρούμε καμιά αιτία περισσότερο αληθινή από αυτήν που προσδιορίστηκε από τους αρχαίους. Εννοώ, δηλαδή, ότι η ψυχή, καθώς προηγείται των ενεργειών της αίσθησης, περιέχει ουσιαστικά τις αιτίες όλων των πραγμάτων. Αλλά προσθέτοντας κάτι στα πράγματα, για να γίνουν αφηρημένα από αισθητά, δεν τα κάνουμε περισσότερο βέβαια και αληθινά, αλλά αντίθετα, περισσότερο εικονικά. Για παράδειγμα, αν κάποιος κατακρίνει το πρόσωπο του Σωκράτη, ενόσω διατηρεί με ακρίβεια στη φαντασία του την εικόνα που είχε αποκομίσει από την αισθητή παρουσία του, θα έχει μια ακριβή γνώση του προσώπου του· αλλά αν θελήσει να τη μεταμορφώσει σε μια πιο εκλεπτυσμένη μορφή, θα εξετάσει περισσότερο τη μεταμορφωμένη φιγούρα παρά τη μορφή του Σωκράτη. Όμως τίποτε τέτοιο δε συμβαίνει με τους ίσους και όμοιους αριθμούς και τα σχήματα. Αντίθετα,

όσο περισσότερο τους φέρνουμε κοντά στο πιο καθορισμένο και τέλειο, τόσο περισσότερο γίνονται φανεροί και γνωστοί, με λογικό επακόλουθο να πλησιάζουν τη δική τους αδιαίρετη μορφή. Μπορούμε πραγματικά να πούμε ότι το ενδιαφέρον μας για τις μαθηματικές αλήθειες εξάπτεται μέσω των αισθητών αντικειμένων αλλά δεν πρέπει με κανένα τρόπο να γίνει αποδεκτό ότι αυτές αντλούν την ύπαρξη τους μέσω μιας αφαίρεσης από τα αισθητά. Γιατί είναι αλήθεια πως οι μορφές, οι οποίες μας μεταφέρονται μέσω των αισθήσεων, μπορούν να προχωρήσουν μέχρι την προσέγγιση της φαντασίας, στην οποία θα ήθελαν να διατηρήσουν μια ατομική υπόσταση και να συνεχίσουν έτσι όπως εισήλθαν. Όταν όμως αργότερα η διάνοια μεταβαίνει πέρα από αυτά στο καθολικό και σε πράγματα που γίνονται κατανοητά μέσω της επιστημονικής λογικής, σαφώς αποδεικνύει ότι εξετάζει αντικείμενα συγγενή προς αυτήν και τα οποία είναι πραγματικά οι γνήσιοι απόγονοι της. Έτσι, η ενέργεια αυτή βρίσκεται σε άμιλλα με τη θεϊκή ενέργεια, δεν είναι ανταγωνιστική και έχει μια δύναμη να διεγείρει, να εξαγνίζει και να διαφωτίζει το λογικό μάτι της ψυχής. Αλλά πώς θα μπορούσε αυτό να πραγματοποιείται, εάν ασχολείται με πράγματα που μόνα τους συντηρούνται μέσω μιας απογύμνωσης από τα αισθητά; Με δυο λόγια, ένα από αυτά τα δύο πράγματα πρέπει να ακολουθούνται: είτε ότι οι μαθηματικές αποδείξεις είναι λιγότερο σίγουρες από τα φυσιολογικά επιχειρήματα· είτε ότι οι μαθηματικές επιστήμες κατέχουν γνώσεις για πράγματα που είναι περισσότερο πραγματικά από τα αντικείμενα της φυσικής. Διότι δεν είναι λογικό να υποθέτουμε ότι τα πράγματα που είναι περισσότερο πραγματικά θα έπρεπε να γίνονται ασαφώς γνωστά, ούτε ότι τα λιγότερο πραγματικά θα έπρεπε να είναι εκδήλως πιο φανερά. Όποτε συμβαίνει κάτι τέτοιο στη θεώρηση οποιασδήποτε νοητικής ουσίας, αυτό είναι επακόλουθο της δικής μας μωρίας και δεν προκαλείται από το ίδιο το αντικείμενο. Διότι ο σχετικός ισχυρισμός του Πλάτωνα είναι απολύτως αληθινός· ότι, δηλαδή, κάθε πράγμα συμμετέχει στο μεγαλείο και τη γνώση ανάλογα με το πώς συμμετέχει στην αλήθεια και την ύπαρξη. Το ίδιο πράγμα επίσης ισχυρίζεται ο Αριστοτέλης στο δεύτερο βιβλίο από το *Μετά τα Φυσικά* αναφέρει εκεί χαρακτηριστικά: *«όπως είναι η ύπαρξη κάθε πράγματος, έτσι είναι και η αλήθεια του».*

9. Δηλαδή: 1, 2, 4, 8, 3, 9, 27. Βλέπε σχετικά στην Εισαγωγή στον Τίμαιο, στο 2ο τόμο της μετάφρασης του Πλάτωνα από το συγγραφέα.

10. Ο οξυδερκής Κέπλερ είχε όχι μόνο συμπεριλάβει το παραπάνω απόσπασμα από τα σχόλια του Πρόκλου, στην πραγματεία του *Περί του Αρμονικού Κόσμου,* αλλά το είχε επίσης εγκωμιάσει ως ακολούθως: «Ad quod attinet quantitates continuas, omnino adsentior Proclo; etsi oratio fluit ipsi torrentis instar, ripas inundans, et caeca dubitationum vada gurgitesque occultans, dum mens plena majestatis tantarum rerum, luctatur in angustiis linguae, et conclusio nunquam sibi ipsi verborum copia satisfaciens, propositionum simplicitatem excedit». Δηλαδή: «Όσον αφορά ό,τι έχει σχέση με τις πηλικότητες συμφωνώ απολύτως με τον Πρόκλο· αν και η γλώσσα του κυλά σαν ένας χείμαρρος που αποκαλύπτει τις όχθες του και κρύβει τα σκοτεινά περάσματα και τις δίνες της αμφιβολίας, ενώ η σκέψη του, γεμάτη από το μεγαλείο που έχουν τα πράγματα τέτοιας λαμπρότητας, αγωνίζεται στα στενά αδιέξοδα της γλώσσας και καθώς το συμπέρασμα ποτέ δεν τον ικανοποιεί, υπερβαίνει με τα αντίγραφα των λέξεων την απλότητα των προθέσεων». —Κέπλερ Γιοχάνες: (1571-1630) Γερμανός αστρονόμος.

11. Όσον αφορά αυτό το ανεκτίμητο έργο με τίτλο *Ιερός Λόγος,* βλέπε τη Βιβλιοθήκη του Φαμπρίκιου, τόμος I, σελ. 118 και 462. Επίσης, στα σχόλια του Συριανού πάνω στο *Μετά τα Φυσικά* του Αριστοτέλη, σελ. 7, 71, 83 και 108, ο αναγνώστης θα βρει μερικά παράξενα αποσπάσματα από αυτή τη φημισμένη εργασία. Ιδιαίτερα στη σελ. 83 ο Συριανός μας πληροφορεί ότι «αυτός που συμβουλεύεται αυτό το έργο, θα βρει όλες τις τάξεις και των μονάδων και των αριθμών, χωρίς να παραλείπεται καμία, πλήρως δοξασμένες».

12. Βλέπε το 2ο βιβλίο του παρόντος έργου, στο οποίο παρουσιάζεται αυτός ο ακέραιος γεωμετρικός αριθμός.

13. Το κείμενο που υπαινίσσεται ο Πρόκλος υπάρχει στο 9ο βιβλίο της *Πολιτείας* και είναι το ακόλουθο: —Τι λοιπόν, δε θα πούμε με θάρρος ότι και οι επιθυμίες που ανήκουν στο φιλόνικο και στο φιλοκερδές μέρος της ψυχής, όταν οδηγούνται από την επιστήμη και το λογικό και με τη δική τους καθοδήγηση επιδιώκουν μόνο τις ηδονές που υποδεικνύει η φρόνηση, θα δοκιμάσουν τις πιο αληθινές ηδονές και τις πιο σύμφωνες με τη φύση τους, που είναι ποτέ δυνατόν να αισθανθούν, εφόσον ακολου-

θούν την αλήθεια, αφού το συμφερότερο σε κάθε πράγμα είναι συγχρόνως και το συμφωνότερο με τη φύση του;
—Μα, πραγματικά είναι το συμφωνότερο με τη φύση του, είπε εκείνος.
—Όταν λοιπόν ολόκληρη η ψυχή υπακούει στο φιλόσοφο μέρος της και δε στασιάζει, τότε κάθε μέρος αυτής πράττει το δικό του έργο και είναι δίκαιο και απολαμβάνει τις ηδονές που του ανήκουν, τις καλύτερες και τις αληθινότερες που μπορεί να καρπωθεί.
—Δίχως αμφιβολία.
—Αλλά όταν επικρατήσει κάποιο από τα δύο άλλα μέρη (της ψυχής), συμβαίνει τότε και αυτό το ίδιο να μη μπορεί να βρει την ηδονή που του προσιδιάζει και τα άλλα να εξαναγκάζει να επιδιώκουν ηδονές ξένες προς τη φύση τους και επομένως καθόλου αληθινές.
—Έτσι είναι.
—Δεν είναι λοιπόν εκείνα που απέχουν περισσότερο από τη φιλοσοφία και τον ορθό λόγο, εκείνα που θα επέφεραν ακριβώς αυτά τα αποτελέσματα;
—Ακριβώς.
—Και δεν απέχει ένα πράγμα από τον ορθό λόγο τόσο όσο απέχει από το νόμο και την τάξη;
—Είναι προφανές.
—Και δεν βρήκαμε ότι οι ερωτικές και οι τυραννικές επιθυμίες απέχουν περισσότερο από κάθε άλλο;
—Ακριβώς έτσι.
—Και λιγότερο οι βασιλικές και οι κόσμιες;
—Ναι.
—Επομένως, ο τύραννος, νομίζω, θα απέχει περισσότερο από την αληθινή και την πιο ταιριαστή στην ανθρώπινη φύση ηδονή, και λιγότερο ο άλλος.
—Κατ' ανάγκη.
—Και ο τύραννος θα ζήσει ζωή αηδέστατη και ο βασιλιάς εξαιρετικά ευχάριστη;
—Αυτό είναι αναντίρρητο.
—Και γνωρίζεις πόσο αηδέστερα ζει ο τύραννος από το βασιλιά;
—Αν μου το πεις....
—Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, μία γνήσια και δύο νόθες· ο τύραννος, εχθρός του νόμου και του ορθού λόγου, περιστοιχιζόμενος από δουλικές ηδονές, βρίσκεται στο έσχατο ά-

κρο των νόθων ηδονών, και πόσο υστερεί στην ευτυχία είναι δύσκολο να πούμε, εκτός αν γίνει κατ' αυτόν τον τρόπο.
—Κατά ποιον;
—Σε σχέση με τον ολιγαρχικό, ο τύραννος έρχεται τρίτος, διότι ανάμεσα τους υπάρχει ο δημοκρατικός.
—Μάλιστα.
—Αν λοιπόν όσα είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής που απολαμβάνει ο τύραννος, έχει από την αλήθεια τρεις φορές μεγαλύτερη απόσταση, σχετικά με την ηδονή του ολιγαρχικού.
—Ακριβώς.
—Αλλά ο ολιγαρχικός έρχεται τρίτος στη σειρά μετά από το βασιλικό, αν υποθέσουμε ότι ο αριστοκρατικός και ο βασιλικός ταυτίζονται.
—Βέβαια τρίτος.
—Ώστε ο τύραννος απέχει από την αληθινή ηδονή το τριπλάσιο του τριπλάσιου.
—Έτσι φαίνεται
—Το είδωλο της τυραννικής ηδονής θα μπορούσε, ως προς το μήκος, να παρασταθεί με έναν επίπεδο αριθμό.
—Και βέβαια.
—Και η απόσταση που απέχει από την αληθινή ηδονή γίνεται φανερή, αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό αυτό με τον εαυτό του και τον υψώσουμε στην τρίτη δύναμη.
—Είναι φανερό σε αυτόν που μπορεί να την υπολογίσει.
—Αν λοιπόν, αντιστρόφως, κάποιος ζητήσει να βρει ποια είναι η απόσταση του βασιλιά από τον τύραννο, ως προς την αλήθεια της ηδονής, δεν θα βρει, ως εξαγόμενο του πολλαπλασιασμού, ότι ο βασιλιάς ζει 729 φορές πιο ευχάριστα από τον τύραννο, και ο τύραννος από το βασιλιά άλλες τόσες φορές;
Στο κείμενο αυτό ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί τους ακόλουθους αριθμούς: θεωρεί το βασιλικό χαρακτήρα ως ανάλογο προς τη μονάδα, τον ολιγαρχικό ως προς τον αριθμό 3 και τον τυραννικό ως προς τον αριθμό 9. Καθώς λοιπόν το 3 είναι το τριπλάσιο της μονάδας, ο ολιγαρχικός είναι το ένα τρίτο του βασιλικού χαρακτήρα- και κατά όμοιο τρόπο ο τύραννος απέχει από τον ολιγαρχικό κατά το τριπλάσιο του αριθμού του. Διότι το 9 είναι το τριπλάσιο του 3, ακριβώς όπως το 3 είναι το τριπλάσιο του 1. Αλλά το 9 είναι ένας τετράγωνος αριθμός, που το μήκος του είναι 3 και το πλάτος του επίσης. Και η τυραννική, λέει ο Πλάτωνας, είναι η τελευταία εικόνα μιας βασιλικής ζωής. Επίσης

ονομάζει το 3 *δύναμη,* διότι αν πολλαπλασιαστεί η μονάδα με αυτό και ό,τι βρεθεί με τον εαυτό του και το 9 επί αυτό, θα έχουμε τα 3, 9, 27. Αλλά ονομάζει το 27 τρίτη αύξηση, που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της δύναμης του 3 και παράγει το ύψος ή ένα στερεό αριθμό. Τέλος, το 27 πολλαπλασιαζόμενο επί τον εαυτό του παράγει το 729, που μπορεί να θεωρηθεί ως τέλειος πολλαπλασιασμός, καθώς ο αριθμός αυτός είναι η 6η δύναμη του 3· και το 6 είναι ένας τέλειος αριθμός. Έτσι, καθώς ο βασιλιάς είναι ανάλογος προς τη μονάδα, λέει ο Πλάτωνας, απέχει κατά 729 φορές από τον τύραννο.

14. Η επανάκτηση της χαμένης γνώσης, βασίζεται στην υπόθεση ότι η ψυχή είναι αληθινά αθάνατη, άρα είχε μια ύπαρξη πρότερη από αυτήν της τωρινής ζωής.

15. Στο *Μένων.*

16. Στα *Μαθηματικά,* σελ. 18.

17. Η λέξη *τελετή* (ή *μύηση),* λέει ο Ερμείας στο έργο του *Εις Πλάτωνος Φαίδρον Σχόλια,* «ονομάστηκε έτσι διότι καθιστούσε την ψυχή τέλεια. Η ψυχή, επομένως, ήταν κάποτε τέλεια. Αλλά εδώ χωρίζεται και δεν είναι ικανή να ενεργεί εξ ολοκλήρου μόνη της». Και προσθέτει: «Αλλά είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε ότι *τελετή, μύησις* και *εποπτεία* διαφέρουν μεταξύ τους. Η *τελετή* επομένως είναι ανάλογη προς αυτό που είναι προπαρασκευαστικό για τους εξαγνισμούς. Αλλά η *μύησις,* που ονομάζεται έτσι από το κλείσιμο των ματιών, είναι περισσότερο θεϊκή. Το κλείσιμο των ματιών στη μύηση σημαίνει ότι δε λαμβάνεις μέσω της αίσθησης αυτά τα θεϊκά μυστήρια, αλλά με την ίδια την αγνή ψυχή. Και η *εποπτεία* είναι η εντός εδραίωση αυτών, οπότε αποβαίνεις θεατής των μυστηρίων». Βλέπε περισσότερα σχετικά με αυτό το ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα στη δεύτερη έκδοση του έργου μου *Πραγματεία επί των Ελευσίνιων και Βακχικών Μυστηρίων,* στα No XV και XVI του THE PAMPHLETTEER.

18. «Si vis beatus esse, cogita hoc primum *contemnere* et *contemni».*

19. Δε γνωρίζουμε πότε ακριβώς έζησαν αυτοί οι φημισμένοι άνθρωποι, ο Θέων και ο Νικόμαχος. Μπορούμε μόνο να συμπεράνουμε, σύμφωνα με τον πολυμαθή Μπουλιάλντους, ότι ο θέων άκμασε ανάμεσα στην εποχή του Τιβέριου Καίσαρα και του Αντωνίνου Πίου. Έγραψε μια Πραγματεία για τα Μαθηματικά, χρήσιμη στη μελέτη του Πλάτωνα. Μέχρι τώρα έχει εκδο-

θεί μόνο εκείνο το μέρος του έργου του που αναφέρεται στην Αριθμητική και Μουσική, αν και αυτά που έγραψε για την Αστρονομία διασώζονται σε χειρόγραφα σε μερικές βιβλιοθήκες, καθώς μαθαίνουμε από τον ακριβολόγο Φαμπρίκιο. Αλλά ο Νικόμαχος, που ήταν ένας Πυθαγόρειος φιλόσοφος από τη Γέρασα, μια πόλη που συνορεύει με τη Βόστρα στην Αραβία, ήταν -σύμφωνα με τον Φαμπρίκιο- κάπως μεταγενέστερος από την εποχή του Αντωνίνου Πίου, αφού αναφέρει τον αστρονόμο Πτολεμαίο που έζησε επί διακυβέρνησης εκείνου του αυτοκράτορα. Τούτος ο σπουδαίος άντρας είχε ιδιαίτερη εκπαίδευση στις μαθηματικές αρχές και ειδικά στη θεωρητική αριθμητική, τόσο που τα ασυνήθιστα επιτεύγματα του στην επιστήμη αυτή έγιναν παροιμιώδη. Έτσι, ο συγγραφέας του διαλόγου μεταξύ των έργων του Λουκιανού που αναγράφεται Φιλόπατρις, σελ. 468, λέει «καί γαρ άριθμέεις ώς Νικόμαχος ό Γερασηνός», δηλαδή, «εσύ κατανοείς τις μαθηματικές έννοιες σαν το Νικόμαχο από τη Γέρασα». Και ο Ιάμβλιχος στο *Περί της Νικόμαχου Αριθμητικής Εισαγωγής,* σελ. 3, λέει: «Ανακαλύπτω ότι ο Νικόμαχος έχει διασώσει καθετί που έχει σχέση με την επιστήμη της αριθμητικής, σύμφωνα με το δόγμα του Πυθαγόρα. Διότι αυτός ο άντρας ήταν σπουδαίος στα μαθηματικά και είχε για δασκάλους του τους ικανότερους στον κλάδο αυτό. Ανεξάρτητα δε από αυτά, έχει παραδώσει μια αξιοθαύμαστη τάξη και θεωρία, που συνοδεύονται από μιαν ακριβή διδασκαλία επιστημονικών αρχών». Όσον αφορά τον Ιάμβλιχο, που ήταν ένας από τους εξέχοντες γνήσιους μαθητές του Πλάτωνα, και που σύμφωνα με την άποψη του Αυτοκράτορα Ιουλιανού ήταν πράγματι μεταγενέστερος του Πλάτωνα, αλλά όχι λιγότερο μεγαλοφυής, παραπέμπω τον αναγνώστη στην «Ιστορία Αποκατάστασης της Πλατωνικής Θεολογίας», στο τέλος του έργου μου *Ο Πρόκλος για τον Ευκλείδη.* Σχετικά με το Βοήθιο, η ζωή του και τα έργα του είναι αρκετά γνωστά ώστε να χρειάζονται οποιαδήποτε αναφορά

20. Βλέπε τη μετάφραση μου στα *Ηθικά Νικομάχεια,* Βιβλίο 10, σελ. 598.

21. Όντας σύμφωνος με αυτό, ο Αριστοτέλης παρατηρεί στα *Πολιτικά* του ότι «εάν υπάρχει ένας, ή περισσότεροι από ένα, που υπερέχουν κατά πολύ σε αρετή, αν και όχι τόσο πολλοί ώστε να συμπληρώσουν μια πόλη, τέτοιοι που η αρετή ή η πολιτική δύναμη όλων των υπόλοιπων να είναι υπερβολικά κατώτερες

για να συγκριθούν με τη δική τους, αν υπήρχαν περισσότεροι από ένα, ή εάν μόνο ένας με τη δική του (αρετή), αυτοί δεν θα έπρεπε πλέον να θεωρούνται μέρος της πόλης. Διότι θα τους αδικούσαμε αν τους τοποθετούσαμε στο ίδιο επίπεδο με εκείνους που είναι τόσο κατώτεροι από αυτούς σε αρετή και σε πολιτική δύναμη· *εφόσον είναι πρέπον να θεωρούμε έναν τέτοια ως Θεό ανάμεσα στους ανθρώπους.* Άρα, ο νόμος δεν είναι για τέτοια πρόσωπα όπως αυτοί· διότι αυτοί είναι οι ίδιοι νόμος. Και θα ήταν γελοίο για οποιονδήποτε πασχίσει να τους θεωρήσει υποκείμενους στους νόμους».

22. Οι περισσότεροι αγνοούν ότι είναι αδαείς όσον αφορά τα αντικείμενα που για άλλους είναι τα πιο θαυμαστά και πραγματικά· αλλά ο κορυφαίος φιλόσοφος αγνοεί ότι είναι αδαής όσον αφορά αντικείμενα ανούσια και ασαφή. Η πρώτη άγνοια είναι το αποτέλεσμα ενός μειονεκτήματος, η δεύτερη μιας υπέρβασης της γνωστικής ενέργειας.

23. Ατενίζει δηλαδή εκείνες τις θείες μορφές στη διάνοια του δημιουργού του σύμπαντος, που αποτελούν υποδείγματα όλων όσων οι ουρανοί περιέχουν.

24. Συγκρίνοντας επομένως τους διανοούμενους με εκείνους που ασχολούνται αποκλειστικά με την έρευνα των αισθητών πραγμάτων, που τέρπονται μόνο με αντικείμενα της αίσθησης και οι οποίοι ούτε καν ονειρεύονται ότι αυτά περισσότερο μοιάζουν με τις πλάνες του ύπνου παρά με τις πραγματικότητες της άγρυπνης αντίληψης, μπορούμε να αναφωνήσουμε σε Ομηρική γλώσσα:

> Η φυλή αυτών τόσο ανώτερη από εκείνων,
> όσο εκείνος που ρίχνει κεραυνό απ' το
> ρυάκι που κυλάει.

ΒΙΒΛΙΟ ΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Σχετικά με την προτεραιότητα της Αριθμητικής σε σχέση με τους άλλους μαθηματικούς κλάδους.

Η Αριθμητική πρέπει να διδάσκεται πρώτη από τις μαθηματικές επιστήμες, διότι έχει τη σχέση της πρώτης αιτίας και μητέρας προς τις άλλες. Προηγείται όλων των άλλων, όχι μόνο επειδή ο δημιουργός του σύμπαντος τη χρησιμοποίησε ως το πρώτο υπόδειγμα της κατανεμημένης νόησης του και συγκρότησε όλα τα πράγματα σύμφωνα με τον αριθμό· αλλά και για έναν άλλο λόγο. Όποτε εκείνο που είναι φύσει προηγούμενο ανατρέπεται, αυτό που είναι μεταγενέστερο ανατρέπεται την ίδια ώρα˙ αλλά όταν εξαφανίζεται το μεταγενέστερο, το προηγούμενο δεν υφίσταται καμία ουσιαστική αλλαγή της προγενέστερης κατάστασης του. Αν επομένως εξαλείψεις το ζώο, η φύση του ανθρώπου αμέσως καταστρέφεται· εξαλείφοντας όμως τον άνθρωπο, το ζώο δε θα εξαφανιστεί. Και αντιθέτως, μεταγενέστερα είναι πάντοτε εκείνα τα πράγματα που εισάγουν μαζί τους κάτι άλλο· ενώ έχουν προτεραιότητα υπόστασης εκείνα που, όταν διατυπώνονται, τα ίδια δεν εισάγουν τίποτε μεταγενέστερης φύσης. Έτσι, αν μιλήσεις για τον άνθρωπο, θα παρουσιάσεις την ίδια ώρα το ζώο, εφόσον ο άνθρωπος είναι ένα ζώο. Αλλά αν μιλήσεις για το ζώο, δε θα παρουσιάσεις την ίδια ώρα το είδος άνθρωπος· διότι το ζώο δεν είναι ίδιο με τον άνθρωπο. Το ίδιο πράγμα φαίνεται να συμβαίνει με τη γεωμετρία και την αριθμητική. Αν δηλαδή αφαιρέσουμε τους αριθμούς, πώς

θα υφίσταται το τρίγωνο ή το τετράγωνο, ή οτιδήποτε άλλο είναι το υποκείμενο της γεωμετρίας; Όλα ορίζονται με αριθμούς. Ενώ, αν αφαιρέσεις το τρίγωνο και το τετράγωνο, και ολόκληρη η γεωμετρία ανατραπεί, το τρία και το τέσσερα, και οι επωνυμίες των άλλων αριθμών δε θα πάψουν να υφίστανται. Όταν γίνεται αναφορά σε οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα, δε συνδέεται την ίδια ώρα με κάποια αριθμητική ονομασία; Όταν όμως αναφέρονται αριθμοί, δεν παρουσιάζεται ταυτόχρονα γεωμετρικό σχήμα.

Ομοίως η προτεραιότητα των αριθμών σε σχέση με τη μουσική καταδεικνύεται ιδιαίτερα, επειδή όχι μόνο τα ίδια τα πράγματα που υφίστανται αφ' εαυτού τους είναι εκ φύσεως προηγούμενα από εκείνα που αναφέρονται σε κάτι άλλο· αλλά η ίδια η μουσική μετατόνιση αποτυπώνεται με αριθμητικές επωνυμίες. Συμβαίνει δηλαδή το ίδιο πράγμα που έχει ήδη αναφερθεί για τη γεωμετρία. Γιατί οι συμφωνίες δια τεσσάρων, δια πέντε και δια πασών[1] ονομάζονται με βάση τα προγενέστερα ονόματα των αριθμών. Ομοίως η αναλογία των ήχων μεταξύ τους ανακαλύπτεται μόνο με αριθμούς. Γιατί ο ήχος που υπάρχει στη δια πασών συμφωνία εκφράζεται με το λόγο δύο. Η συμφωνία δια τεσσάρων περιέχει το λόγο 4 προς 3. Και αυτό που αποκαλείται συμφωνία δια πέντε συνδέεται από το λόγο 3 προς 2. Αυτό που με αριθμούς είναι επόγδοο είναι στη μουσική ένας τόνος. Εν ολίγοις, η προτεραιότητα της αριθμητικής σε σχέση με τη μουσική θα αποδειχθεί αναμφίβολα στην πορεία της παρούσας μελέτης. Αλλά εφόσον η γεωμετρία και η μουσική είναι προηγούμενες της αστρονομίας, τότε συνάγεται ότι η αστρονομία είναι σε μεγαλύτερο βαθμό μεταγενέστερη της αριθμητικής. Διότι σε αυτή την επιστήμη, ο κύκλος, η σφαίρα, το κέντρο, οι παράλληλοι κύκλοι και οι άξονες εξετάζονται όλα σε σχέση με τη γεωμετρία. Επίσης, η ανώτερη δύναμη της γεωμετρίας αποδεικνύεται από το ότι κάθε κίνηση έπεται της ακινησίας και κάθε σταθερότητα προηγείται πάντοτε εκ φύσεως της κινητικότητας. Αλλά η αστρονομία είναι η θεωρία των κινητών ενώ η γεωμετρία των ακίνητων φύσεων. Ομοίως η κίνηση των άστρων υμνείται ως συνο-

δευόμενη από αρμονικές μετατονίσεις. Από αυτό επίσης φαίνεται ότι η δύναμη της μουσικής προηγείται σε αρχαιότητα της πορείας των άστρων. Και δεν μπορεί να αμφισβητηθεί ότι η αριθμητική εκ φύσεως υπερέχει της αστρονομίας, εφόσον φαίνεται ότι είναι αρχαιότερη από τη γεωμετρία και τη μουσική που προηγούνται της αστρονομίας. Διότι με αριθμούς σημειώνουμε την ανατολή και τη δύση των άστρων, την ταχύτητα και τη βραδύτητα των πλανητών, τις εκλείψεις και πολυάριθμες μεταβολές της σελήνης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Σχετικά με τον ορισμό του αριθμού και της μονάδας.

Ο Θαλής[2] όρισε τον αριθμό σύμφωνα προς το δόγμα των Αιγυπτίων από τους οποίους διδάχθηκε ως άθροισμα μονάδων. Αλλά ο Πυθαγόρας τον όρισε ως την επέκταση και ενέργεια των σπερματικών λόγων που περιέχονται στη μονάδα. Ή άλλως, ως εκείνο το οποίο, προηγούμενο όλων των πραγμάτων, υφίσταται στη θεία διάνοια, με το οποίο όλα τα πράγματα διευθετήθηκαν και παραμένουν σε μια αδιάρρηκτη τάξη. Άλλοι όμως από τους μαθητές του τον όρισαν ως πρόοδο από τη μονάδα με το δικό της μέγεθος. Και ο Εύδοξος ο Πυθαγόρειος λέει ότι αριθμός είναι ορισμένο πλήθος, διακρίνοντας το είδος από το γένος. Οι μαθητές του Ίππασου, που ονομάζονταν *Ακουσματικοί,* έλεγαν ότι αριθμός είναι το πρώτο υπόδειγμα συγκρότησης του κόσμου και ότι είναι το όργανο κρίσης του θεού, που είναι ο δημιουργός του σύμπαντος. Ο δε Φιλόλαος λέει ότι ο αριθμός είναι ο πιο εξαίρετος και αυτογενής δεσμός της αιώνιας διάρκειας των εγκόσμιων φύσεων.

Η μονάδα αποτελεί το ελάχιστο μιας ασυνεχούς ποσότητας, ή το πρώτο και κοινό μέρος αυτής, ή η αρχή της. Σύμφωνα με το Θυμαρίδα, είναι η περιορισμένη ποσότητα· εφόσον η αρχή και το τέλος κάθε πράγματος καλείται όριο. Σε

κάποια πράγματα όμως, όπως στον κύκλο και τη σφαίρα, όριο καλείται το μέσο. Οι μεταγενέστεροι ορίζουν τη μονάδα ως εκείνο σύμφωνα προς το οποίο κάθε πράγμα που υπάρχει ονομάζεται ένα[3]. Στον ορισμό όμως αυτό χρειάζεται να προστεθούν οι λέξεις «καθ' οιονδήποτε τρόπο συγκεντρωμένο και αν είναι». Οι οπαδοί του Χρυσίππου ισχυρίζονται ασαφώς ότι η μονάδα είναι ένα πλήθος, εφόσον αυτή μονάχα αντιτίθεται στο πλήθος. Και κάποιοι από τους Πυθαγόρειους έλεγαν ότι η μονάδα είναι το όριο του αριθμού και των μερών διότι από αυτήν, όπως από ένα σπόρο και μια αιώνια ρίζα, οι λόγοι αυξάνονται και μειώνονται αντιστρόφως· κάποιοι μειώνονται επ' άπειρον, διαιρούμενοι πάντοτε με ένα μεγαλύτερο αριθμό· άλλοι, αυξανόμενοι επ' άπειρον, μεγεθύνονται πάλι. Ομοίως, κάποιοι έχουν ορίσει τη μονάδα ως είδος ειδών, επειδή εμπεριέχει εν δυνάμει (δηλ. αιτιωδώς) όλες τις αιτίες που υπάρχουν στον αριθμό. Εξετάζεται δε κατ' αυτόν τον τρόπο, επειδή είναι πλήρες το υπόλοιπο του λόγου προς τον εαυτό της· όπως το ίδιο συμβαίνει και με άλλα τέτοια πράγματα που υπάρχουν μέσω της μονάδας.

Η μονάδα[4] επομένως είναι η αρχή και το στοιχείο των αριθμών, η οποία, ενώ το πλήθος ελαττώνεται με την αφαίρεση, στερείται η ίδια κάθε αριθμού και παραμένει σταθερή και αμετάβλητη· εφόσον δεν είναι δυνατόν η διαίρεση να προχωρήσει πέραν της μονάδας. Εάν διαιρέσουμε το *ένα,* το οποίο είναι στα αισθητά σε μέρη, πάλι το *ένα* γίνεται πλήθος και πολλά· και με αφαίρεση καθενός από τα μέρη, καταλήγουμε στο ένα. Αν πάλι διαιρέσουμε αυτό το ένα σε μέρη, τα μέρη θα γίνουν πλήθος· και με αφαίρεση (πάλι) καθενός από τα μέρη, θα φτάσουμε τελικά στην ενότητα. Έτσι ώστε το *ένα* καθώς είναι ένα, είναι αμέριστο και αδιαίρετο. Διότι, πράγματι, όταν ένας άλλος αριθμός διαιρεθεί, μειώνεται και διαιρείται σε μέρη μικρότερα του εαυτού του. Για παράδειγμα, το 6 μπορεί να διαιρεθεί σε 3 και 3, ή σε 4 και 2, ή σε 5 και 1. Αλλά το *ένα* στα αισθητά, αν όντως διαιρεθεί, ως σώμα μειώνεται και με τον καταμερισμό διαιρείται σε μέρη μικρότερα του εαυτού του, αλλά ως αριθμός αυξάνεται· διότι αντί του ενός γίνεται πολλά. Άρα σύμφωνα με

αυτό το *ένα* είναι αδιαίρετο. Διότι τίποτε (στα αισθητά) το οποίο διαιρείται, δε διαιρείται σε μέρη μεγαλύτερα από τον εαυτό του· αλλά εκείνο που διαιρείται σε μέρη μεγαλύτερα από το σύνολο, και σε μέρη ίσα προς το σύνολο, διαιρείται ως αριθμός. Έτσι, εάν το *ένα* το οποίο υπάρχει στα αισθητά, διαιρεθεί σε έξι μέρη ίσα προς το σύνολο, ως αριθμός πράγματι θα διαιρεθεί σε ίσα προς το σύνολο, δηλαδή σε 1, 1, 1, 1, 1, 1 και επίσης σε μέρη μεγαλύτερα του συνόλου, δηλαδή σε 4 και 2· διότι 4 και 2 είναι ως αριθμοί μεγαλύτεροι από το ένα. Έτσι η μονάδα ως αριθμός είναι αδιαίρετη. Και αποκαλείται μονάδα, επειδή παραμένει αμετάβλητη και δεν παρεκκλίνει από τη φύση της· διότι όποτε η μονάδα πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό της, παραμένει μονάδα· εφόσον μια φορά το ένα είναι ένα· και αν πολλαπλασιάσουμε τη μονάδα επ' άπειρον, αυτή συνεχίζει να είναι η μονάδα. Ή ονομάσθηκε μονάδα, επειδή είναι χωριστή και παραμένει μόνη της, χωριστά από το υπόλοιπο πλήθος των αριθμών[5].

Εφόσον επομένως ο αριθμός είναι ο συνδετικός δεσμός όλων των πραγμάτων, είναι αναγκαίο να παραμένει στην κατάλληλη ουσία του, με μια αιώνια αμετάβλητη ομοιότητα ύπαρξης· και να συντίθεται, αλλά όχι από πράγματα διαφορετικής φύσης. Γιατί τι θα μπορούσε να συνενώσει την ουσία του αριθμού, εφόσον το υπόδειγμα του συνένωσε όλα τα πράγματα. Φαίνεται δε να είναι σύνθετος από μόνος του. Τίποτε όμως δε συντίθεται από όμοια, ούτε και από πράγματα συνδεδεμένα χωρίς αναλογία, ουσιαστικά χωρισμένα το ένα από το άλλο. Άρα είναι φανερό, εφόσον ο αριθμός είναι συνδεδεμένος, ότι ούτε συνενώνεται από όμοια, ούτε από πράγματα που δε συνενώνονται με κάποια αναλογία. Επομένως οι πρωταρχικές φύσεις από τις οποίες απαρτίζεται ο αριθμός είναι η άρτια και η περιττή, οι οποίες μέσω μιας κάποιας θείας δύναμης, μολονότι είναι ανόμοιες και αντίθετες, ρέουν από μία πηγή και ενώνονται σε μια σύνθεση και συμφωνία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Σχετικά με τη διαίρεση των αριθμών και τους διάφορους ορισμούς του άρτιου και του περιττού.

Η πρώτη διαίρεση του αριθμού λοιπόν είναι σε άρτιο και περιττό. Άρτιος είναι εκείνος ο αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη, χωρίς την παρέμβαση της μονάδας στο ενδιάμεσο. Περιττός είναι εκείνος που δεν μπορεί να διαιρεθεί σε ίσα μέρη, χωρίς να παρεμβαίνει στο ενδιάμεσο η μονάδα. Αυτοί είναι οι κοινοί και γνωστοί ορισμοί του άρτιου και του περιττού. Αλλά ο ορισμός τους σύμφωνα με την πυθαγόρεια διδασκαλία είναι ο ακόλουθος: άρτιος αριθμός είναι εκείνος που με την ίδια διαίρεση μπορεί να διαιρεθεί σε μεγαλύτερο και μικρότερο· μεγαλύτερο ως προς το διάστημα και μικρότερο ως προς την ποσότητα, σύμφωνα προς τις αντίθετες ροπές αυτών των δύο ειδών. Αλλά περιττός αριθμός είναι εκείνος στον οποίο αυτό δε μπορεί να συμβεί και η φυσική διαίρεσή του είναι σε δύο άνισα μέρη. Για παράδειγμα, αν οποιοσδήποτε άρτιος αριθμός διαιρεθεί, δεν υπάρχει κανένα τμήμα μεγαλύτερο του μισού όσον αφορά το διάστημα της διαίρεσης, αλλά όσον αφορά την ποσότητα, δεν υπάρχει άλλη διαίρεση μικρότερη από εκείνη σε δύο μέρη. Έτσι, αν ο άρτιος αριθμός 8 διαιρεθεί σε 4 και 4, δε θα υπάρχει καμιά άλλη διαίρεση που να παράγει μεγαλύτερα μέρη, δηλαδή στην οποία και τα δύο μέρη να είναι μεγαλύτερα. Επίσης δε θα υπάρχει καμιά άλλη διαίρεση που να διαιρεί όλο τον αριθμό σε μικρότερη ποσότητα, διότι δεν υπάρχει διαίρεση μικρότερη από την κατάτμηση σε δύο μέρη. Γιατί, όταν ένα όλο διαιρείται σε τρία μέρη, το διάστημα ελαττώνεται, αλλά ο διαιρέτης αυξάνεται[6]. Ως ποσό, αρχίζοντας από έναν όρο, επιδέχεται άπειρη αύξηση προόδου, αλλά ως πηλικότητα[7] μπορεί να ελαττωθεί απεριόριστα· το αντίθετο συμβαίνει στη διαίρεση του άρτιου αριθμού, γιατί εδώ η διαίρεση είναι μεγαλύτερη σε διάστημα, αλλά μικρότατη σε ποσότητα. Με άλλα λόγια, τα μέρη της πηλικότητας είναι μεγαλύτερα, αλλά το ποσό είναι το μικρότερο δυνατό.

Ομοίως, σύμφωνα προς έναν αρχαιότερο τρόπο, υπάρχει άλλος ένας ορισμός του άρτιου αριθμού, ο ακόλουθος: άρτιος αριθμός είναι εκείνος που μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα και σε δύο άνισα μέρη, με τέτοιο τρόπο που σε καμία διαίρεση, ούτε η ισότητα θα αναμιχθεί με την ανισότητα, ούτε η ανισότητα με την ισότητα. Εξαιρείται μόνο η δυάδα, η αρχή της ισότητας, που δεν επιδέχεται άνισο μερισμό, επειδή αποτελείται από δύο μονάδες. Για παράδειγμα, ένας άρτιος αριθμός όπως το 10 μπορεί να διαιρεθεί σε 5 και 5, που είναι δύο ίσα, μπορεί επίσης να διαιρεθεί σε άνισα μέρη, όπως σε 3 και 7. Ισχύει ωστόσο ο εξής όρος, όταν το ένα μέρος της διαίρεσης είναι άρτιο, το άλλο επίσης είναι άρτιο. Και όταν το ένα μέρος είναι περιττό, το άλλο μέρος είναι επίσης περιττό, όπως είναι φανερό στον ίδιο αριθμό 10. Γιατί, όταν αυτό χωρίζεται σε 5 και 5, ή σε 3 και 7, και τα δύο μέρη σε κάθε διαίρεση είναι περιττά[8]. Αλλά, εάν αυτός, ή οποιοσδήποτε άλλος άρτιος αριθμός, διαιρεθεί σε ίσα μέρη, όπως το 8 σε 4 και 4, και επίσης σε άνισα μέρη, όπως το ίδιο 8 σε 5 και 3, στην πρώτη διαίρεση και τα δυο μέρη είναι άρτια, ενώ στη δεύτερη είναι περιττά. Ούτε είναι ποτέ δυνατόν το ένα μέρος της διαίρεσης να είναι άρτιο και το άλλο περιττό, ούτε το ένα περιττό και το άλλο άρτιο. Ενώ περιττός αριθμός είναι εκείνος που σε κάθε διαίρεση διαιρείται πάντοτε σε άνισα μέρη, έτσι ώστε πάντοτε να επιδεικνύει και τα δύο είδη αριθμού. Ούτε υφίσταται ποτέ το ένα είδος χωρίς το άλλο, αλλά το ένα ανήκει στην ισότητα και το άλλο στην ανισότητα. Έτσι, αν το 7 διαιρεθεί σε 3 και 4, ή σε 5 και 2, το ένα μέρος είναι άρτιο και το άλλο περιττό. Και το ίδιο πράγμα φαίνεται να συμβαίνει σε όλους τους περιττούς αριθμούς. Ούτε στη διαίρεση του περιττού αριθμού μπορούν αυτά τα δύο είδη, τα οποία εκ φύσεως συγκροτούν τη δύναμη και την ουσία του αριθμού, να είναι το ένα χωρίς το άλλο. Μπορεί επίσης να ειπωθεί ότι περιττός αριθμός είναι εκείνος ο οποίος διαφέρει από τον άρτιο κατά τη μονάδα, είτε με αύξηση είτε με μείωση. Και ότι άρτιος είναι εκείνος ο οποίος διαφέρει από τον περιττό κατά τη μονάδα, είτε με αύξηση είτε με μείωση. Γιατί, εάν η μονάδα αφαιρε-

θεί ή προστεθεί στον άρτιο αριθμό, γίνεται περιττός- εάν πάλι το ίδιο πράγμα γίνει στον περιττό αριθμό, αυτός αμέσως γίνεται άρτιος.

Κάποιοι από τους αρχαίους επίσης είπαν ότι η μονάδα είναι ο πρώτος από τους περιττούς αριθμούς, διότι ο άρτιος αριθμός είναι αντίθετος στον περιττό. Και όμως η μονάδα είναι είτε άρτιος είτε περιττός. Δεν μπορεί ωστόσο να είναι άρτιος, γιατί δεν μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη, ούτε εν ολίγοις επιδέχεται οποιαδήποτε διαίρεση. Επομένως, η μονάδα είναι περιττός. Επίσης, εάν ο άρτιος προστεθεί στον άρτιο, το σύνολο γίνεται άρτιο, όμως αν η μονάδα προστεθεί σε έναν άρτιο αριθμό, παράγει σύνολο περιττό. Άρα, η μονάδα δεν είναι άρτιος, αλλά περιττός. Ο Αριστοτέλης, όμως, στην πραγματεία *Περί των Πυθαγορείων* παρατηρεί ότι το ένα ή μονάδα συμμετέχει και στις δύο αυτές φύσεις, εφόσον προστιθέμενη στον περιττό παράγει τον άρτιο, ενώ προστιθέμενη στον άρτιο παράγει τον περιττό· πράγμα που δε θα ήταν δυνατό να προκαλέσει, εάν δε συμμετείχε και στις δύο αυτές φύσεις. Για τούτο το ένα καλείται αρτιοπέρισσο. Ο Αρχύτας επίσης είναι της ίδιας άποψης. Η μονάδα επομένως είναι η πρώτη ιδέα του περιττού αριθμού, ακριβώς όπως οι Πυθαγόρειοι αποδίδουν τον περιττό αριθμό σε εκείνο που είναι ορισμένο και τακτικό μέσα στον κόσμο. Η αόριστη δυάδα είναι η πρώτη ιδέα του άρτιου αριθμού· και για αυτό οι Πυθαγόρειοι αποδίδουν τον άρτιο αριθμό σε εκείνο που είναι αόριστο, άγνωστο και άμετρο στον κόσμο. Επίσης, η δυάδα καλείται αόριστη, επειδή δεν είναι ορισμένη όπως είναι η μονάδα. Οι όροι όμως που ακολουθούν, σε συνεχή σειρά από τη μονάδα, αυξάνονται κατά μια ίση προσθήκη, επειδή καθένας τους υπερβαίνει τον προηγούμενο αριθμό κατά τη μονάδα. Και καθώς αυξάνονται, οι λόγοι του ενός προς τον άλλο φθίνουν. Έτσι, στους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, ο λόγος του 2 προς το 1 είναι δύο, αλλά του 3 προς το 2 είναι ημιόλιος[9], του 4 προς το 3 είναι επίτριτος, του 5 προς το 4 επιτέταρτος, του 6 προς το 5 επίπεμπτος. Ο τελευταίος όμως λόγος είναι μικρότερος από τον επιτέταρτο, ο επιτέταρτος από τον επίτριτο, ο επίτριτος από τον ημιόλιο, και ο

ημιόλιος από το λόγο δύο. Και το ίδιο συμβαίνει στους υπόλοιπους αριθμούς. Επίσης, οι περιττοί και οι άρτιοι αριθμοί, όταν παρατηρούνται σχετικά με τη μονάδα, ακολουθούν διαδοχικά οι μεν τους δε[10].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Σχετικά με την υπεροχή της μονάδας.

Κάθε αριθμός είναι το μισό του αθροίσματος των δύο αριθμών που τον περιβάλλουν σε μια φυσική ακολουθία Ομοίως, είναι το μισό του αθροίσματος των αριθμών που περιβάλλουν αυτούς τους δύο˙ κι ακόμη το μισό του αθροίσματος των αριθμών που περιβάλλουν αυτούς τους τελευταίους δύο, και ούτω καθεξής, έως ότου η πρόοδος σταματήσει στη μονάδα. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 6 και 4, ο πρώτος βρίσκεται εμπρός και ο τελευταίος πίσω του. Αυτοί επομένως, αν προστεθούν, δίνουν άθροισμα 10, του οποίου το μισό είναι 5. Και οι αριθμοί που βρίσκονται μπροστά και πίσω από το 6 και το 4, είναι το 3 και το 7. Και αυτών επίσης το ήμισυ του αθροίσματος είναι 5. Και πάλι, το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται εμπρός και πίσω από το 3 και το 7, είναι ομοίως το διπλάσιο του 5· γιατί αυτοί είναι το 8 και το 2. Και το ίδιο θα συμβαίνει σε όλους τους αριθμούς σε μια φυσική ακολουθία, μέχρι να φθάσουμε στο όριο της μονάδας. Διότι μόνο η μονάδα δε βρίσκεται ανάμεσα σε δύο όρους, και για αυτό είναι το μισό μονάχα εκείνου του αριθμού που έπεται αυτής. Έτσι, είναι φανερό ότι η μονάδα είναι ο πρώτος από όλους τους αριθμούς σε μία φυσική ακολουθία και ότι επάξια αναγνωρίζεται ως πηγή κάθε πλήθους, ανεξάρτητα από το πόσο εκτείνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

Η διαίρεση του άρτιου αριθμού. Σχετικά με τον αρτιάκις άρτιο αριθμό και τις ιδιότητες του.

Όσον αφορά τους άρτιους αριθμούς, υπάρχουν τρία είδη. Στο πρώτο, είδος ανήκει ο αριθμός που ονομάζεται αρτιάκις άρτιος, στο δεύτερο αυτός που ονομάζεται αρτιοπέρισσος και στο τρίτο ο περισσάρτιος. Και τα είδη που είναι πραγματικά αντίθετα και κατέχουν τα άκρα, είναι ο αρτιάκις άρτιος και ο αρτιοπέρισσος. Ενώ το είδος που αποτελεί ένα σταθερό μέσον και συμμετέχει στο καθένα από τα άκρα, είναι ο αριθμός που ονομάζεται περισσάρτιος.

Αρτιάκις άρτιος είναι ο αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη και καθένα από αυτά μπορεί να διαιρεθεί σε δύο άλλα ίσα μέρη, από τα οποία καθένα μπορεί να διαιρεθεί με όμοιο τρόπο και η διαίρεση μπορεί να συνεχισθεί μέχρι να σταματήσει με φυσικό τρόπο στην αδιαίρετη μονάδα. Δηλαδή, ο αριθμός 64 έχει για μισό του το 32, αλλά το μισό αυτού είναι το 16, το μισό του 16 είναι το 8, του 8 το 4, του 4 το 2 και το μισό του 2 είναι το 1, το οποίο εκ φύσεως δεν επιδέχεται διαίρεση.

Στον αριθμό αυτό συμβαίνει οποιοδήποτε μέρος του να είναι αρτιάκις άρτιος και στην ονομασία και στην ποσότητα. Και φαίνεται ότι αυτός ο αριθμός ονομάστηκε αρτιάκις άρτιος, επειδή όλα τα μέρη του είναι αρτιάκις άρτιοι και στο όνομα και στην ποσότητα. Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς αυτός ο αριθμός έχει άρτια μέρη και στην ποσότητα και στην ονομασία.

Η γένεση δε αυτών των αριθμών είναι η ακόλουθη: όλοι οι αριθμοί σε αναλογία δύο προς ένα, αρχίζοντας από τη μονάδα, θα βρίσκονται πάντοτε να είναι αρτιάκις άρτιοι· δεν είναι δυνατόν αυτοί να παραχθούν κατά άλλον τρόπο. Για παράδειγμα, οι αριθμοί σε αναλογία δύο προς ένα από τη μονάδα είναι: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 και ούτω καθεξής επ' άπειρον. Είναι όλοι τους αρτιάκις άρτιοι και ο λόγος της προόδου τους είναι δύο προς ένα.

Είναι αξιοσημείωτο στην ακολουθία αυτή ότι εάν ο αριθμός των όρων είναι άρτιος, οι δύο μέσοι όροι αντιστοιχούν ο ένας στον άλλο, και το ίδιο θα συμβαίνει με τους όρους που βρίσκονται δίπλα από αυτούς, και ούτω καθεξής μέχρις ότου κάθε όρος να συναντηθεί με τους άκρους. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, μια ακολουθία από αρτιάκις αρτίους αριθμούς, από το 1 μέχρι το 128. Στη σειρά αυτή, επειδή ο αριθμός των όρων είναι άρτιος, δεν μπορεί να βρεθεί ένας μέσος. Επομένως, υπάρχουν δύο μέσοι, το 8 και το 16, οι οποίοι αμοιβαίως αντιστοιχούν ο ένας στον άλλο. Γιατί το 8 είναι το ένα δέκατο έκτο του τελευταίου όρου 128 και το 16 είναι το ένα όγδοο αυτού. Ομοίως, οι όροι δίπλα σε αυτούς θα βρεθούν να αντιστοιχούν ο ένας στον άλλο. Γιατί το 32 είναι το ένα τέταρτο του 128 και το 4 είναι το ένα τριακοστό δεύτερο αυτού. Ομοίως, από τους όρους που βρίσκονται μετά από αυτούς, το 64 είναι το ένα δεύτερο του 128 και το 2 είναι το ένα εξηκοστό τέταρτο αυτού· επίσης το 128 είναι μία φορά το 128, και το 1 είναι το ένα εκατοστό εικοστό όγδοο του 128. Εάν όμως ο αριθμός των όρων είναι περιττός, μπορεί να βρεθεί ένας μονάχα μέσος, εξαιτίας της φύσης του περιττού, ο οποίος αντιστοιχεί στον εαυτό του. Γιατί αν δοθεί η ακολουθία: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, θα υπάρξει μόνο ένας μέσος, δηλαδή το 8, που είναι το ένα όγδοο του 64. Άρα μετατρέπεται στον εαυτό του και στην ονομασία και στην ποσότητα. Κατά τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω, οι όροι που βρίσκονται μπροστά και πίσω από το 8, παρέχουν ο ένας στον άλλο αμοιβαίες ονομασίες σύμφωνα προς τη σωστή τους ποσότητα. Διότι το 4 είναι το ένα δέκατο έκτο του 64 και το 16 είναι ένα το τέταρτο αυτού. Ομοίως, το 32 είναι το ένα δεύτερο του 64 και το 2 είναι το ένα τριακοστό δεύτερο αυτού. Το 1 επίσης είναι το ένα εξηκοστό τέταρτο του 64 και το 64 είναι μία φορά το 64. Έτσι, καθώς έχουμε πει, όλα τα μέρη αυτής της σειράς βρίσκονται να είναι αρτιάκις άρτιοι και στην ονομασία και στην ποσότητα.

Είναι επίσης αξιοθαύμαστο ότι για οποιονδήποτε αριθμό όρων στην ακολουθία αυτή, το άθροισμα όλων των όρων εκτός του τελευταίου ισούται με τον τελευταίο όρο μείον ένα.

Όταν ο αριθμός των όρων είναι 3, το άθροισμα του 1 και 2 είναι ο 3, ο οποίος είναι 4 μείον 1. Σε τέσσερις όρους, ομοίως, το άθροισμα του 1, του 2 και του 4 είναι ο 7, ο οποίος είναι 8 μείον 1. Σε πέντε όρους 1+2+4+8=15, που είναι μειωμένος κατά 1 από τον 16· και ούτω καθεξής για οποιονδήποτε άλλο ορισμένο αριθμό όρων. Επίσης, ο πρώτος απόγονος των αριθμών διατηρεί και φυλάσσει αυτή την ιδιότητα· διότι η μονάδα είναι μικρότερη από τον επόμενο αριθμό 2 κατά μια μονάδα μονάχα. Συνεπώς, δεν είναι καθόλου άξιο απορίας ότι το άθροισμα των άλλων όρων θα συμφωνούσε με την αρμόζουσα αρχή τους[11].

Ομοίως θα ανακαλύψουμε ότι η συμβολή αυτής της ιδιότητας στην εξακρίβωση εκείνων των αριθμών που ονομάζονται υπερτελείς, ελλιπείς[12] και τέλειοι, είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Δεν πρέπει επίσης να αποσιωπηθεί ότι σε τούτη την ακολουθία, όταν ο αριθμός των όρων είναι άρτιος, το υπό των άκρων όρων οριζόμενο ορθογώνιο είναι ίσο με το ορθογώνιο που ορίζεται από τους δύο μέσους" και τούτο γιατί όταν η ακολουθία αποτελείται από άρτιο αριθμό όρων, οι μέσοι είναι δύο. Στη διάταξη των αρτιάκις άρτιων αριθμών στην οποία τελευταίος όρος είναι το 128, οι δύο μέσοι είναι το 8 και το 16, που όταν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους παράγουν το 128, που ισούται με 1 x 128. Ομοίως, αριθμοί που βρίσκονται δίπλα στους μέσους, εάν πολλαπλασιαστούν, θα παράγουν τον ίδιο αριθμό. Διότι 4 x 32 ισούται με 1 x 128. Εάν όμως ο αριθμός των όρων είναι περιττός, υπάρχει μόνο ένας μέσος όρος, ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του θα ισούται με το γινόμενο των δύο άκρων. Στην ακολουθία λοιπόν των όρων στην οποία άκρος είναι το 64, ένας μονάχα μέσος όρος βρίσκεται, και αυτός είναι το 8, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με τον εαυτό του ισούται με το 1 x 64. Επίσης, οι όροι που βρίσκονται δίπλα από αυτόν το μέσο, θα δώσουν, όταν πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους, το ίδιο γινόμενο, δηλαδή 4x16 = 64. Επίσης, το 32 πολλαπλασιαζόμε-

νο με το 2, και το 1 πολλαπλασιαζόμενο με το 64, παράγουν τον ίδιο αριθμό χωρίς καμία διαφοροποίηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

Σχετικά με τον αρτιοπέρισσο αριθμό και τις ιδιότητές του.

Αρτιοπέρισσος αριθμός είναι αυτός που πραγματικά διαθέτει ο ίδιος τη φύση και την ουσία της ισότητας, αλλά αντιτίθεται στη φύση του αρτιάκις άρτιου αριθμού με μια αντίθετη διαίρεση. Γιατί θα αποδειχθεί ότι αυτός διαιρείται κατά έναν πολύ ανόμοιο τρόπο. Επειδή είναι άρτιος, διαιρείται σε ίσα μέρη, αλλά τα μέρη του καθίστανται αδιαίρετα. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 6, 10, 14, 18, 22 και άλλοι όμοιοι προς αυτούς. Διαιρώντας αυτούς τους αριθμούς σε ίσα μέρη αμέσως σταματάμε εξαιτίας του περιττού αριθμού που δεν μπορεί να διαιρεθεί ισομερώς.

Αλλά στους αριθμούς αυτούς ισχύει ότι όλα τα μέρη τους έχουν ονομασίες αντίθετες προς τις ποσότητες που περιέχουν. Δεν είναι ποτέ δυνατό, οποιοδήποτε μέρος ενός αρτιοπέρισσου αριθμού να αποκτήσει ονομασία και ποσότητα του ίδιου είδους. Διότι, πάντοτε, αν η ονομασία είναι άρτια, η ποσότητα του μέρους θα είναι περιττή. Για παράδειγμα, το μισό του 18 είναι το 9, το οποίο είναι περιττό στην ποσότητα, αλλά άρτιο στην ονομασία, εφόσον είναι το μισό. Αντίθετα το ένα τρίτο του 18, που είναι μια μη άρτια ονομασία, είναι το 6, το οποίο είναι άρτιος σε ποσότητα. Και πάλι, κατά αντιστροφή, το ένα έκτο του 18, που είναι άρτια ονομασία, είναι το 3, που είναι όμως περιττό στην ποσότητα. Και το ένατο μέρος, που είναι μη άρτια ονομασία, είναι το 2, που είναι άρτιος αριθμός. Το ίδιο θα βρεθεί να ισχύει σε όλους τους άλλους αρτιοπέρισσους αριθμούς. Ούτε είναι ποτέ δυνατό το όνομα και ο αριθμός οποιουδήποτε μέρους να είναι του ίδιου είδους.

Οι αριθμοί αυτοί παράγονται θέτοντας από τη μονάδα όλους τους αριθμούς που διαφέρουν ο ένας από τον άλλο κατά 2, δηλαδή όλους τους περιττούς αριθμούς σε μια φυσική ακολουθία. Εάν καθένας από αυτούς πολλαπλασιαστεί με το 2, θα παραχθούν όλοι οι αρτιοπέρισσοι αριθμοί. Ας πάρουμε λοιπόν τους ακόλουθους περιττούς αριθμούς αρχίζοντας από τη μονάδα, σε μια φυσική τάξη, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Αυτοί, αν καθένας από αυτούς πολλαπλασιαστεί με το 2, θα σχηματίσουν την ακολουθία 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38. Καθένας από αυτούς, αν διαιρεθεί, θα δεχτεί μία μόνο διαίρεση, αποκλείοντας μια δεύτερη διαίρεση λόγω παρέμβασης της ανισότητας.

Επίσης, αυτοί οι αριθμοί διαφέρουν ο ένας από τον άλλο κατά 4· αυτό οφείλεται στον τρόπο γένεσης τους. Εφόσον, οι περιττοί αριθμοί, που είναι η βάση αυτών, υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 2· και εφόσον καθένας από αυτούς πολλαπλασιάζεται με το 2, αύξηση είναι το τέσσερα.

Αυτά τα είδη των αριθμών, οι αρτιάκις άρτιοι και οι αρτιοπέρισσοι, λέγεται ότι είναι αντίθετα, επειδή στον αρτιοπέρισσο αριθμό, μονάχα ο μεγαλύτερος άκρος επιδέχεται διαίρεση[13] και ο μικρότερος όρος μόνο σε αυτόν αποδεσμεύεται από τη διαίρεση. Επίσης στη μορφή του αρτιάκις άρτιου αριθμού, το γινόμενο των άκρων ισούται με το γινόμενο των μέσων, αν ο αριθμός των όρων είναι άρτιος· αλλά αν ο αριθμός των όρων είναι περιττός, το τετράγωνο του μέσου ισούται με το γινόμενο των άκρων. Στον αρτιοπέρισσο αριθμό όμως, αν ο αριθμός των όρων είναι περιττός και επομένως υπάρχει ένας μόνο μέσος όρος, αυτός ο όρος θα είναι το μισό του αθροίσματος των όρων που βρίσκονται δίπλα του. Θα είναι επίσης, το μισό του αθροίσματος των όρων που βρίσκονται δίπλα σε αυτούς· και έτσι θα έχει η κατάσταση, μέχρι τους άκρους όλων των όρων. Στην ακολουθία, για παράδειγμα, των αρτιοπέρισσων αριθμών 2, 6, 10, ο μέσος αριθμός 6 είναι το μισό του 10+2. Αν υπάρχουν δύο μέσοι, το άθροισμα αυτών θα ισούται με το άθροισμα των όρων που βρίσκονται μπροστά και πίσω από αυτούς. Έτσι,

στην ακολουθία 2, 6, 10, 14, το άθροισμα των μέσων 6+10 ισούται με το 2+14, το άθροισμα των άκρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

Σχετικά με τον περισσάρτιο αριθμό και τις ιδιότητες του.

Ο περισσάρτιος αριθμός συντίθεται από τον αρτιάκις άρτιο αριθμό και τον αρτιοπέρισσο. Είναι ένα μέσο ανάμεσα στους δύο. Ο αριθμός αυτός είναι τέτοιος που μπορεί να διαιρεθεί σε ίσα μέρη, και καθένα από αυτά σε άλλα ίσα μέρη και μερικές φορές τα τμήματα αυτών των μερών μπορούν και πάλι να διαιρεθούν, αλλά αυτή η ισομερής διαίρεση δεν καταλήγει ως τη μονάδα. Τέτοιοι αριθμοί είναι το 24 και το 28. Καθένας από αυτούς μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη, το ίδιο και τα τμήματα αυτών, αλλά η διαίρεση δεν εκτείνεται μέχρι τη μονάδα. Επειδή λοιπόν αυτός ο αριθμός επιδέχεται πάνω από μια διαίρεση, μοιάζει με τον αρτιάκις άρτιο και ξεχωρίζει από τον αρτιοπέρισσο αριθμό. Αλλά επειδή η διαίρεση δεν προχωρά ως τη μονάδα, έχει σχέση με τον αρτιοπέρισσο και ξεχωρίζει από τον αρτιάκις άρτιο αριθμό.

Συμβαίνει ωστόσο ο αριθμός τούτος να κατέχει αυτό που και οι δύο προαναφερθέντες αριθμοί δεν έχουν, και να περιέχει εκείνο που αυτοί οι δύο κατέχουν χωριστά. Πραγματικά, διαθέτει εκείνο που οι δύο άλλοι δε διαθέτουν διότι στον αρτιοπέρισσο αριθμό μόνο ο μεγαλύτερος όρος διαιρείται σε δύο ίσα μέρη, ενώ αντίθετα στον αρτιάκις άρτιο αριθμό μονάχα ο μικρότερος όρος δε διαιρείται ισομερώς. Στον περισσάρτιο αριθμό εν τούτοις, ούτε μόνο ο μεγαλύτερος όρος επιδέχεται αυτή τη διαίρεση, ούτε μόνο ο μικρότερος τη στερείται· διότι και τα μέρη διαιρούνται αλλά η διαίρεση δε φθάνει μέχρι τη μονάδα, επειδή βρίσκεται ένας όρος που δεν μπορεί να διαιρεθεί πριν από αυτή. Επίσης, ο περισσάρ-

τιος αριθμός διαθέτει εκείνο που κατέχουν ξεχωριστά οι δύο άλλοι εφόσον σε κάποια μέρη του η ποσότητα συμφωνεί με την ονομασία, και σε αυτό μοιάζει με τους αρτιάκις άρτιους αριθμούς, ενώ άλλα μέρη του ονομάζονται αντίθετα προς την κατάλληλη ποσότητα τους, και σε αυτό μοιάζει με τον αρτιοπέρισσο αριθμό. Στον αριθμό 24 η ποσότητα του μέρους είναι άρτια, έχοντας και άρτια ονομασία. Διότι το ένα τέταρτο αυτού είναι το 6, το ένα δεύτερο το 12, το ένα έκτο το 4 και το ένα δωδέκατο το 2. Αυτές οι ονομασίες των μερών δεν αντιτίθεται προς την ισότητα της ποσότητας. Αντίθετα τα μέρη 8, 3 και 1 δεν αντιστοιχούν στην ονομασία με τις ποσότητες˙ διότι το 8 είναι το ένα τρίτο, το 3 είναι το ένα όγδοο και το 1 είναι το ένα εικοστό τέταρτο μέρος. Στα μέρη αυτά όταν οι ονομασίες είναι άρτιες, οι ποσότητες είναι περιττές, ενώ όταν οι ποσότητες είναι άρτιες, οι ονομασίες είναι περιττές.

Οι αριθμοί αυτοί παράγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να προσδιορίζουν την ουσία και τη φύση τους από την αρχή της γένεσης τους, γιατί αυτοί είναι οι απόγονοι των αρτιάκις άρτιων και των αρτιοπέρισσων αριθμών. Διότι οι αρτιοπέρισσοι παράγονται, καθώς έχουμε δείξει, από την ακολουθία των περιττών αριθμών και οι αρτιάκις άρτιοι από την αύξηση με βάση την αναλογία δύο προς ένα. Ας διατάξουμε λοιπόν όλους τους αριθμούς που είναι εκ φύσεως περιττοί στη σειρά και από κάτω τους αριθμούς που παράγονται από την αύξηση με βάση την αναλογία δύο προς ένα, αρχίζοντας από το 4, ως εξής:

3	5	7	9	11	13	15	17	19	κ.λπ.
4	8	16	32	64	128	256	512	1024	κ.λπ.

Αν λοιπόν ο πρώτος αριθμός στη μια σειρά πολλαπλασιαστεί με τον πρώτο στην άλλη, δηλαδή εάν το 3 πολλαπλασιαστεί με το 4, ή εάν ο ίδιος πρώτος πολλαπλασιαστεί με το δεύτερο αριθμό της δεύτερης σειράς, δηλαδή εάν το 3 πολλαπλασιαστεί με το 8, ή ο πρώτος με τον τρίτο, δηλαδή το 3 με το 16, και ούτω καθεξής μέχρι τον τελευταίο όρο˙ ή εάν ο δεύτερος όρος στην πρώτη σειρά πολλαπλασιαστεί με τον

πρώτο, ή το δεύτερο, ή τον τρίτο, η με δυο λόγια, με οποιονδήποτε όρο στη δεύτερη σειρά· ή ο τρίτος όρος στην πρώτη σειρά με οποιονδήποτε όρο στη δεύτερη, και το ίδιο με τον τέταρτο, τον πέμπτο, κλπ. όρους της πρώτης σειράς, όλοι οι αριθμοί που παράγονται κατ' αυτόν τον τρόπο, θα είναι περισσάρτιο. Δηλαδή 3 x 4 = 12, 5 x 4 = 20, 7 x 4 = 28, και ούτω καθεξής. Ή πάλι, 3 χ 8 = 24, 5 χ 8 = 40, 7x 8 = 56. Και με τον τρόπο αυτό, αν όλοι οι αριθμοί της γεωμετρικής προόδου του δύο, πολλαπλασιαστούν με εκείνους της πρώτης σειράς, θα παράγουν γινόμενα που είναι περισσάρτιοι αριθμοί.

Είναι επίσης αξιοθαύμαστο σε αυτό το είδος των αριθμών ότι εάν η διάταξη και η περιγραφή τους μελετηθούν σύμφωνα με το πλάτος τους θα παρουσιαστεί η ιδιότητα των αρτιοπέρισσων αριθμών, ενώ η ιδιότητα των αρτιάκις άρτιων θα παρουσιαστεί εάν η διάταξη τους μελετηθεί σύμφωνα με το μήκος τους. Διότι, σύμφωνα με το πλάτος, οι δύο άκροι ισούνται με τους δύο μέσους, ή εάν δεν υπάρχει παρά ένας μέσος, το διπλάσιο αυτού ισούται με το άθροισμα των άκρων. Αλλά, σύμφωνα με το μήκος, η ιδιότητα του αρτιάκις αριθμού θα ανακαλυφθεί· διότι τότε το γινόμενο των άκρων ισούται με εκείνο των δύο μέσων, ή εάν δεν υπάρχει παρά ένας μέσος, το τετράγωνο αυτού ισούται με το γινόμενο των άκρων. Η περιγραφή τους όμως, σύμφωνα με το μήκος και το πλάτος τους, είναι η ακόλουθη. Τα γινόμενα που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των αρτιάκις άρτιων αριθμών σε μια τακτική σειρά με το 3, τοποθετούνται στην πρώτη σειρά. Τα γινόμενα πάλι που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των ίδιων αρτιάκις άρτιων αριθμών με το 5, τοποθετούνται στη δεύτερη σειρά. Εκείνα που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό με το 7, τοποθετούνται στην τρίτη σειρά και ούτω καθεξής.

3	**5**	**7**	**9 κ.λπ.**	**Περιττοί αριθμοί**
4	**8**	**16**	**32 κ.λπ.**	**Αρτιάκις άρτιοι αριθμοί**

		Μήκος			
	12	24	48	96	
	20	40	80	160	
Πλάτος					Πλάτος
	28	56	112	224	
	36	72	144	288	
		Μήκος			

Εδώ, αν πάρουμε στο πλάτος τρεις όρους, όπως για παράδειγμα τους 12, 20 και 28, το άθροισμα των άκρων είναι διπλάσιο του μέσου όρου· διότι 12+28=40. Έτσι επίσης 20+36=56, που ισούται με δύο φορές το 28. Αλλά όπου υπάρχουν δύο μέσοι το άθροισμα των άκρων θα είναι ίσο με το άθροισμα των μέσων. Έτσι 12+36=48=20+28. Επίσης 24+72=96=40+ 56· και το ίδιο ισχύει για τα υπόλοιπα μέρη του πλάτους. Αυτό όμως συμβαίνει σύμφωνα με τον τύπο του αρτιοπέρισσου αριθμού, στον οποίο, καθώς ήδη παρατηρήσαμε, παρουσιάζεται αυτή η ιδιότητα. Και πάλι, αν κατευθύνουμε την προσοχή μας στο μήκος, όπου δύο όροι έχουν ένα μέσο, το γινόμενο των άκρων είναι ίσο με το τετράγωνο του μέσου ή κεντρικού όρου· διότι 12 x 48 = 576 = 24 x 24. Και πάλι, 24 x 96 = 2304 = 48 x 48. Αλλά όταν δύο όροι περιλαμβάνουν δύο μέσους, το γινόμενο των άκρων θα ισούται με το γινόμενο των μέσων. Έτσι 12x96= 1152 = 24x48. Και αυτό φανερώνει μίμηση και συγγένεια με τον αρτιάκις άρτιο αριθμό, από την συμμετοχή του οποίου οι αριθμοί αυτοί αποκτούν την ιδιότητα αυτή. Το ίδιο γεγονός ισχύει και για τις άλλες σειρές του μήκους. Ως εκ τούτου, γίνεται φανερό ότι ο περισσάρτιος αριθμός παράγεται από τα δύο προηγούμενα είδη άρτιων αριθμών, διότι διατηρεί αμετάβλητες τις ιδιότητές τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

Σχετικά με τον περιττό αριθμό και τη διαίρεση του.

Ο περιττός αριθμός διακρίνεται λόγω της φύσης και της ουσίας του από τον άρτιο. Ο τελευταίος μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη, αλλά ο προηγούμενος δε συμμετέχει σε αυτή την ιδιότητα, εξαιτίας της παρέμβασης της μονάδας. Ο περιττός αριθμός αντίστοιχα έχει τρεις υποδιαιρέσεις˙ η πρώτη είναι ο αριθμός που ονομάζεται πρώτος και ασύνθετος, η δεύτερη εκείνος που είναι δεύτερος και σύνθετος˙ και η τρίτη εκείνος που υφίσταται ως μέσο ανάμεσα σε αυτούς και φυσικά αντλεί κάτι και από τους δύο λόγω της συγγένειας του με τον καθένα. Αυτός είναι από μόνος του, πραγματικά, δεύτερος και σύνθετος, αλλά σε σχέση με άλλους αριθμούς βρίσκεται να είναι πρώτος και ασύνθετος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

Σχετικά με τον πρώτο και ασύνθετο αριθμό.

Πρώτος και ασύνθετος αριθμός είναι εκείνος που δεν έχει κανένα άλλο μέρος παρά εκείνο που χαρακτηρίζεται από τη συνολική ποσότητα του αριθμού˙ ώστε αυτό το μέρος δεν είναι άλλο από τη μονάδα. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Σε καθένα από τους αριθμούς αυτούς, επομένως, κανένα άλλο μέρος δεν μπορεί να βρεθεί, εκτός από εκείνο που ονομάζεται από τους ίδιους, και αυτό, καθώς έχουμε προηγουμένως παρατηρήσει, είναι μονάχα η μονάδα. Διότι, στο 3 υπάρχει ένα μόνο μέρος, δηλαδή το ένα τρίτο, το οποίο ονομάζεται από το 3, και το ένα τρίτο είναι η μονάδα. Κατά τον ίδιο τρόπο, στο 5 υπάρχει ένα μόνο μέρος, το ένα πέμπτο και αυτό είναι η μονάδα. Το ίδιο θα βρεθεί να ισχύει και στους υπόλοιπους. Αυτός λοιπόν ο αριθμός ονομάζεται πρώτος και ασύνθετος, επειδή κανένας άλλος α-

ριθμός δεν τον μετρά παρά η μονάδα, η οποία είναι η μητέρα όλων των αριθμών. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν είναι σύνθετος από κάποιους άλλους αριθμούς, αλλά παράγεται από τις μονάδες μονάχα πολλαπλασιασμένες με τους εαυτούς τους[14]. Δηλαδή τρεις φορές το ένα είναι τρία, πέντε φορές το ένα είναι πέντε, επτά φορές το ένα είναι επτά, και το ίδιο συμβαίνει με τους υπόλοιπους. Αλλά καθώς αυτοί πολλαπλασιάζονται με τους εαυτούς τους, παράγουν άλλους αριθμούς σαν κι αυτούς. Διαθέτοντας επίσης μια πρωταρχική ουσία, θα αποτελέσουν στοιχεία όλων των αριθμών που παράγονται από αυτούς, επειδή είναι ασύνθετοι και σχηματίζονται με μια απλή γένεση. Όλοι οι προερχόμενοι από αυτούς αριθμοί αναλύονται σε τέτοιους, αλλά οι ίδιοι ούτε παράγονται από άλλους, ούτε αναλύονται σε άλλους αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ

Σχετικά με το δεύτερο και σύνθετο αριθμό.

Ο δεύτερος και σύνθετος αριθμός είναι όντως ο ίδιος περιττός, επειδή σχηματίζεται από την ίδια ιδιότητα του περιττού αριθμού, αλλά δε διατηρεί καμιά πρωταρχική ουσία. Συντίθεται από άλλους αριθμούς και έχει μέρη που ονομάζονται και από τον ίδιο και από μια ξένη λέξη. Μόνο ίσως το μέρος που αυτοκαθορίζεται, θα βρεθεί πάντοτε στους αριθμούς αυτούς να είναι η μονάδα. Αντίθετα τα μέρη που ονομάζονται από μία άλλη λέξη, είναι άλλες φορές πολλά και άλλες φορές μονάχα ένα. Τέτοιου είδους είναι οι αριθμοί 9, 15, 21, 25, 27, 33, 39. Καθένας από αυτούς επομένως έχει μέρη που ονομάζονται από τον ίδιο, δηλαδή τις κατάλληλες μονάδες. Έτσι το 9 έχει το ένα ένατο, που είναι το 1· το 15 έχει το ένα δέκατο πέμπτο μέρος, που επίσης είναι το 1 και ομοίως συμβαίνει στους υπόλοιπους. Αλλά αυτοί έχουν επίσης ένα μέρος ονομαζόμενο από μια άλλη λέξη. Έτσι το 9 έχει το ένα τρίτο, που είναι το 3· και το 15 έχει το ένα τρίτο,

που είναι το 5, καθώς και το ένα πέμπτο, το 3. Το 21 έχει ένα τρίτο μέρος, δηλαδή το 7, και ένα έβδομο μέρος, που είναι το 3· και υπάρχει η ίδιο ιδιότητα στους υπόλοιπους (αριθμούς). Όμως ο αριθμός αυτός ονομάζεται δεύτερος, επειδή δε μετράται μονάχα από τη μονάδα, αλλά και από έναν άλλο αριθμό με τη σύμπραξη του οποίου και σχηματίζεται. Ούτε και περιέχει ο ίδιος κάτι από μια πρωταρχική φύση· διότι αυτός γεννιέται από άλλους αριθμούς, όπως για παράδειγμα, το 9 από το 3, *το* 15 από το 3 και το 5, το 21 από το 3 και το 7· και οι υπόλοιποι πατά τον ίδιο τρόπο. Αλλά ονομάζεται σύνθετος, επειδή μπορεί να αναλυθεί σε εκείνους τους αριθμούς από τους οποίους λέγεται ότι συνετέθη, δηλαδή σε εκείνους που μετρούν ένα σύνθετο αριθμό. Τίποτε που μπορεί να αναλυθεί δεν είναι ασύνθετο, αλλά είναι κατ' ανάγκη σύνθετο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI

Σχετικά με εκείνο τον αριθμό που είναι από μόνος του δεύτερος και σύνθετος, αλλά σε σχέση με έναν άλλο πρώτος και ασύνθετος.

Ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς, δηλαδή τους πρώτους και ασύνθετους και τους δεύτερους και σύνθετους, καθώς διαχωρίζονται μεταξύ τους λόγω φυσικής διαφοροποίησης, παρουσιάζεται ένας άλλος αριθμός που αφενός είναι πραγματικά από μόνος του σύνθετος και δεύτερος και επιδέχεται μέτρηση από άλλον -άρα είναι ικανός να έχει ένα μέρος με μια ονομασία ξένη- αφετέρου όταν συγκριθεί με έναν άλλο αριθμό αυτού του είδους, δε συνδέεται μαζί του με κανένα κοινό μέτρο· ούτε και θα έχουν οι αριθμοί αυτοί επαμφοτερίζοντα μέρη. Αριθμοί αυτής της περιγραφής είναι το 9 και το 25, γιατί αυτοί δεν έχουν κανένα κοινό μέτρο εκτός από τη μονάδα, η οποία είναι το κοινό μέτρο όλων των αριθμών. Αυτοί επίσης δεν έχουν επαμφοτερίζοντα μέρη. Γιατί εκείνο

που είναι στο 9 το ένα τρίτο δεν είναι στο 25· και εκείνο που είναι στο 25 το ένα πέμπτο δεν είναι στο 9. Έτσι, οι δυο αυτοί αριθμοί είναι εκ φύσεως δεύτεροι και σύνθετοι, αλλά συγκρινόμενοι μεταξύ τους καθίστανται πρώτοι και ασύνθετοι, επειδή δεν έχουν άλλο μέτρο από τη μονάδα, η οποία ορίζεται από τον καθένα τους, δηλαδή το 9 έχει το ένα ένατο και το 25 το ένα εικοστό πέμπτο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

Σχετικά με τη γένεση των πρώτων και ασύνθετων, των δεύτερων και σύνθετων αριθμών και εκείνου του αριθμού που είναι από μόνος του δεύτερος και σύνθετος, αλλά σε σχέση με έναν άλλο πρώτος και ασύνθετος.

Η γένεση όμως και η καταγωγή αυτών των αριθμών επιτυγχάνεται με την ακόλουθη μέθοδο, που ο Ερατοσθένης ονόμασε «κόσκινο», γιατί αν όλοι οι περιττοί αριθμοί τοποθετηθούν στο μέσο, με την τεχνική που θα αποκαλύψουμε σύντομα, θα ξεχωρίσουν οι αριθμοί του πρώτου, του δεύτερου ή του τρίτου είδους. Ας διατάξουμε κατά σειρά όλους τους περιττούς αριθμούς από το 3 μέχρι όπου θέλουμε, δηλαδή: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49. Έχοντας λοιπόν τοποθετήσει έτσι τους αριθμούς, θα πρέπει να εξετάσουμε ποιος είναι ο πρώτος αριθμός της σειράς, του οποίου το 3 είναι το μέτρο. Και θα βρεθεί ότι αν παραλειφθούν δύο αριθμοί, το 3 θα είναι διαιρέτης εκείνου του αριθμού που βρίσκεται αμέσως μετά από αυτούς, δηλαδή του 9. Επίσης, αν μετά το 9 παραλειφθούν δύο άλλοι, θα είναι διαιρέτης του επόμενου αριθμού 15. Και πάλι, αν ξεκινώντας από το 15, παραλειφθούν δύο αριθμοί, το 3 θα είναι διαιρέτης του επόμενου αριθμού 21. Και έτσι θα διαπιστώνεται επ' άπειρον ότι ο πρώτος αριθμός 3, παραλείποντας κάθε φορά δύο αριθμούς, είναι διαιρέτης όλων

των αριθμών που είναι μετά από αυτόν, σύμφωνα με την ποσότητα της κανονικής σειράς των περιττών αριθμών. Αλλά προκειμένου να βρούμε τους αριθμούς των οποίων το 5, ο δεύτερος περιττός αριθμός, είναι διαιρέτης, πρέπει να παραλειφθούν τέσσερις όροι, και ο αριθμός που ακολουθεί αμέσως μετά θα μετρηθεί με το 5, Έτσι, παραλείποντας τους τέσσερις περιττούς αριθμούς 7, 9, 11, 13, ο επόμενος όρος θα είναι το 15, ο οποίος μετράται από το 5 σύμφωνα με την ποσότητα του πρώτου περιττού αριθμού 3· διότι το ένα πέμπτο του 15 είναι το 3. Εάν τώρα, μετά από αυτόν, παραλειφθούν οι τέσσερις επόμενοι αριθμοί, δηλαδή 17, 19, 21, 23, ο αριθμός 5 θα είναι διαιρέτης του επόμενου αριθμού 25. Και αν μετά από αυτόν, παραλειφθούν τέσσερις όροι, η ίδια σταθερότητα τάξης θα διατηρηθεί, το 5 θα διαιρεί το 35, που είναι ο επόμενος αριθμός. Και αυτό είναι μια άπειρη διαδικασία.

Αν πάλι ερευνάται ποιους αριθμούς διαιρεί ο τρίτος αριθμός, έξι όροι πρέπει να παραλειφθούν και ο έβδομος όρος στην τάξη θα διαιρείται με τον τρίτο δίνοντας πηλίκο την ποσότητα του πρώτου αριθμού, δηλαδή το τρία. Και μετά από την παράλειψη αυτών των έξι όρων, ο αριθμός που αμέσως εμφανίζεται, θα διαιρείται με τον τρίτο αριθμό και θα έχει για πηλίκον το δεύτερο αριθμό. Έτσι, μετά το 7, παραλείποντας έξι όρους, ο αριθμός 21 που εμφανίζεται αμέσως μετά θα διαιρείται με το 3· και μετά το 21, αν παραλειφθούν έξι όροι, ο επόμενος αριθμός 35 θα μετράται με το 7 πέντε φορές. Αν πάλι παραλειφθούν έξι όροι, ο αριθμός που εμφανίζεται μετά, δηλαδή το 49, θα μετράται από το ίδιο το 7 επτά φορές, που είναι η ποσότητα του τρίτου όρου. Αυτή η καθιερωμένη τάξη θα προχωρήσει ανεξάρτητα από τον αριθμό των διατεταγμένων όρων. Έτσι, αυτοί θα δεχθούν μια μεταβολή μέτρησης· ακριβώς όπως αυτοί είναι εκ φύσεως περιττοί σε μια κανονική σειρά. Αλλά θα διαιρούνται παραλείποντας όρους σύμφωνα με έναν άρτιο αριθμό, αρχίζοντας με μια παράλειψη δύο όρων. Έτσι ο πρώτος περιττός αριθμός θα είναι διαιρέτης των περιττών αριθμών που ακολουθούν μετά από παράλειψη δύο όρων ο δεύτερος, εκείνων που α-

κολουθούν μετά από παράλειψη τεσσάρων όρων ο τρίτος, όταν παραλείπονται έξι, ο τέταρτος, όταν παραλειφθούν οκτώ, και ο πέμπτος, όταν παραλείπονται δέκα όροι, θα είναι διαιρέτης των αριθμών που ακολουθούν σε κανονική σειρά. Το ίδιο συμβαίνει και με τους υπόλοιπους επ' άπειρον. Επίσης, ίδιο θα είναι το αποτέλεσμα, αν οι όροι διπλασιαστούν και αριθμοί παραλειφθούν σύμφωνα με το διπλασιασμό. Έτσι, το 3 είναι ο πρώτος όρος και ένα, γιατί κάθε πρώτο κατέχει τη θέση του ένα. Εάν λοιπόν αυτός πολλαπλασιάσει τον αριθμό της θέσης του δύο φορές, θα παράγει δύο φορές το ένα. Και αφού δυο φορές το ένα είναι δύο, δύο όροι πρέπει να παραλειφθούν. Αν πάλι ο δεύτερος όρος, που είναι το 5, διπλασιάσει τον αριθμό της θέσης του, θα παράγει το 4 και τέσσερις όροι πρέπει να παραλειφθούν. Ομοίως, αν το 7, που είναι ο τρίτος όρος, διπλασιάσει τον αριθμό της θέσης του, θα παράγει το 6· και επομένως έξι όροι πρέπει να παραλειφθούν σε μια τακτική σειρά. Ο τέταρτος όρος επίσης, αν διπλασιάσει τον αριθμό της θέσης του, θα παράγει το 8 και οκτώ όροι πρέπει να παραλειφθούν. Το ίδιο θα βρεθεί να συμβαίνει με όλους τους άλλους όρους. Οι ακολουθίες εν τούτοις θα δώσουν τον τρόπο μέτρησης σύμφωνα με τη σειρά παράθεσης. Δηλαδή ο πρώτος όρος διαιρεί τον πρώτο όρο στον οποίο αναφέρεται δίνοντας πηλίκο τον πρώτο τη τάξει αριθμό, δηλαδή τον εαυτό του· αλλά διαιρεί το δεύτερο δίνοντας πηλίκο το δεύτερο τη τάξει, τον τρίτο δίνοντας πηλίκο τον τρίτο· και τον τέταρτο δίνοντας πηλίκο τον τέταρτο. Όταν όμως αρχίζει να διαιρεί ο δεύτερος, διαιρεί τον πρώτο στον οποίο αναφέρεται δίνοντας πηλίκο τον πρώτο τη τάξει, αλλά διαιρεί το δεύτερο στον οποίο αναφέρεται δίνοντας πηλίκο τον εαυτό του, δηλαδή το δεύτερο τη τάξει όρο, και τον τρίτο δίνοντας τον τρίτο· και το ίδιο και για τους υπόλοιπους. Έτσι, το 3 διαιρεί το 9 και έχει πηλίκο το 3, το 15 με πηλίκο το 5· το 21 με πηλίκο το 7, το 27 με πηλίκο το 9, και ούτω καθεξής. Αλλά το 5 διαιρεί το 15 με πηλίκο το 3, το 25 με πηλίκο το 5, το 35 με πηλίκο το 7, το 45 με πηλίκο το 9, και ομοίως για τους υπόλοιπους. Αν επομένως κατευθύνουμε την προσοχή μας στους άλλους όρους, είτε σε

εκείνους που διαιρούν άλλους, είτε σε εκείνους που οι ίδιοι διαιρούνται από άλλους, θα ανακαλύψουμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει ένα κοινό μέτρο για όλους, ούτε όλοι αυτοί, ταυτόχρονα, να διαιρούν κάποιον άλλο αριθμό. Θα φανεί ότι κάποιοι από αυτούς διαιρούνται μόνο από έναν άλλο αριθμό· άλλοι διαιρούνται από περισσότερους, ενώ κάποιοι δεν έχουν άλλο μέτρο από τη μονάδα. Έτσι, εκείνοι που δεν επιδέχονται άλλο μέτρο εκτός από τη μονάδα, είναι οι πρώτοι και ασύνθετοι αριθμοί· αλλά εκείνοι που δέχονται κάποιο άλλο μέτρο εκτός από τη μονάδα, ή διαθέτουν την ονομασία ενός ξένου μέρους, είναι οι δεύτεροι και σύνθετοι αριθμοί.

Το τρίτο είδος όμως -δηλαδή ο αριθμός που είναι από μόνος του δεύτερος και σύνθετος, αλλά όταν συγκριθεί με έναν άλλο, είναι πρώτος και ασύνθετος- επιτυγχάνεται με την ακόλουθη μέθοδο. Τα τετράγωνα των πρώτων και ασύνθετων αριθμών, όταν συγκριθούν μεταξύ τους, θα βρεθούν να μην έχουν κανένα κοινό μέτρο (δηλαδή διαιρέτη). Έτσι, το τετράγωνο του 3 είναι το 9 και το τετράγωνο του 5 είναι το 25. Αυτοί λοιπόν δεν έχουν κανένα κοινό μέτρο. Το τετράγωνο του 5 είναι το 25 και του 7 είναι το 49· και αυτά συγκρινόμενα μεταξύ τους φαίνεται ότι στερούνται κοινού μέτρου. Διότι δεν υπάρχει κανένα κοινό μέτρο αυτών, εκτός από τη μονάδα, που είναι η δημιουργός και μητέρα όλων αυτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

Σχετικά με τη μέθοδο ανακάλυψης του κοινού διαιρέτη ή της έλλειψης του στους αριθμούς.

Για να ανακαλύψουμε όμως εάν τέτοιοι αριθμοί έχουν άλλο κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα, ή εάν καθένας από αυτούς διαιρείται μόνο από τη μονάδα, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη μέθοδο. Δεδομένων δύο άνισων αριθμών, εί-

ναι απαραίτητο να αφαιρέσουμε το μικρότερο από το μεγαλύτερο. Εάν το υπόλοιπο είναι ακόμη μεγαλύτερο, αφαιρούμε πάλι από αυτό το μικρότερο, αλλά αν είναι μικρότερο, το αφαιρούμε από το μεγαλύτερο εναπομείναντα αριθμό. Και αυτό πρέπει να γίνεται μέχρι που η μονάδα τελικά να εμποδίσει περαιτέρω αφαίρεση, ή κάποιος περιττός αριθμός, εάν και οι δύο προτεινόμενοι αριθμοί είναι περιττοί. Αυτός ο αριθμός που απομένει, είναι ο κοινός διαιρέτης τους. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τους αριθμούς 9 και 29, των οποίων προτείνεται να διερευνηθεί ο κοινός διαιρέτης. Αν αφαιρέσουμε το μικρότερο από το μεγαλύτερο, θα έχουμε υπόλοιπο το 20. Από αυτό πάλι αν αφαιρέσουμε το μικρότερο θα μας δώσει υπόλοιπο το 11. Από αυτό πάλι αφαιρούμε το 9 και μένει υπόλοιπο το 2. Αν αφαιρέσουμε το 2 από το 9 θα δώσει υπόλοιπο το 7. Από το 7 αν αφαιρέσουμε το 2 θα απομείνει 5. Και πάλι, από το 5 αν αφαιρέσουμε το 2 θα απομείνει το 3. Παραπέρα, αν το 2 αφαιρεθεί από το 3 θα απομείνει το 1. Και στην τελευταία θέση, αν το 1 αφαιρεθεί από το 2, η αφαίρεση θα τελειώσει στη μονάδα, που θα είναι το μόνο μέτρο των δύο αριθμών 9 και 29. Αυτοί οι αριθμοί επομένως ονομάζονται, όσον αφορά ο ένας τον άλλο, πρώτοι αριθμοί.

Ας διερευνήσουμε όμως τον κοινό διαιρέτη δύο άλλων αριθμών, του 21 και του 9, για να διαπιστωθεί τι είδους είναι αυτοί όταν συγκρίνονται μεταξύ τους. Πάλι λοιπόν, από το μεγαλύτερο αριθμό 21 αν αφαιρέσουμε το μικρότερο αριθμό 9, θα έχουμε υπόλοιπο 12. Αν τώρα αφαιρέσουμε το 9 από το 12, το υπόλοιπο θα είναι 3. Αλλά αν το 3 αφαιρεθεί από το 9, θα δώσει υπόλοιπο το 6· από το οποίο, αν αφαιρεθεί το 3, θα δώσει υπόλοιπο το 3. Και από αυτό, δεν μπορεί να αφαιρεθεί το 3 έτσι ώστε να αφήσει κάποιο υπόλοιπο. Άρα, οι αριθμοί αυτοί έχουν κοινό διαιρέτη, που είναι το 3.

Ο Ερατοσθένης φαίνεται ότι σωστά ονόμασε αυτή την επινόηση κόσκινο· διότι σε αυτήν ξεχωρίζουν οι σύνθετοι από τους ασύνθετους αριθμούς, ακριβώς όπως σε ένα κόσκινο, το καθαρό διαχωρίζεται από το ακάθαρτο και το λεπτό από αυτό που είναι πηχτό και παχύ.

ΤΟ ΚΟΣΚΙΝΟ ΤΟΥ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ

Εδώ το 7 υπολογίζει τον πρώτο αριθμό σύμφωνα με το 3, το δεύτερο σύμφωνα με το 5, τον τρίτο σύμφωνα με τον εαυτό του και το ίδιο ισχύει γιά όλους τους υπόλοιπους.

Η σειρά των περιττών που υπολογίζονται από το 7	21		35		49		63		77

Εδώ ο πρώτος αριθμός υπολογίζεται από το 5 σύμφωνα με το 3, ο δεύτερος από το 5 σύμφωνα με τον εαυτό του, ο τρίτος από το 5 σύμφωνα με το 7 κ.λπ.

Η σειρά των περιττών που υπολογίζονται από το 5	15			25		35		45		55		65		75	

Εδώ ο πρώτος αριθμός υπολογίζεται από το 3 σύμφωνα με τον εαυτό του, ο δεύτερος από το 3 σύμφωνα με το 5, ο τρίτος από το 3 σύμφωνα με το 7 κ.λπ.

Η σειρά των περιττών που υπολογίζονται από το 3					9			15			21			27			33			39			45			51			57			63			69			75	
Περιττοί Αριθμοί		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77

Το κόσκινο του Ερατοσθένη μέσω του οποίου επιβεβαιώνεται ποιοι αριθμοί είναι πρώτοι και ποιοι σύνθετοι

Πρώτοι και ασύνθετοι αριθμοί		5	7		11	13		17	19		23			29	31			37		41	43		47			53			59	61			67		71	73		

Φαίνεται πως ο Ερατοσθένης πολύ ορθά αποκάλεσε την παραπάνω επινόησή του κόσκινο. Γιατί όπως ακριβώς το κόσκινο ξεδιαλέγει το καθαρό από το ακάθαρτο και το λεπτεπίλεπτο από το χονδροειδές, έτσι ξεχωρίζουν οι σύνθετοι από τους ασύνθετους αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIV

Μια άλλη υποδιαίρεση του άρτιου αριθμού σε τέλειο, ελλιπή και υπερτέλειο ή υπερτελή.

Μια δεύτερη υποδιαίρεση των άρτιων αριθμών είναι η ακόλουθη. Κάποιοι είναι υπερτέλειοι και άλλοι είναι ελλιπείς ανάλογα με την εκάστοτε κατάσταση ανισότητας. Διότι κάθε ανισότητα μελετάται με μεγαλύτερους ή μικρότερους όρους. Οι υπερτελείς αριθμοί λοιπόν είναι τέτοιοι που λόγω άμετρης αφθονίας υπερβαίνουν με το πλήθος των μερών τους τη μέτρηση της σωστής ποσότητας τους. Αντιθέτως, οι ελλιπείς αριθμοί, σαν να πιέζονται από την ένδεια, είναι μικρότεροι από το άθροισμα των μερών τους. Υπερτέλειοι αριθμοί είναι τέτοιοι όπως το 12 και το 24· διότι αυτοί θα βρεθούν να είναι μεγαλύτεροι από το σύνολο των μερών τους. Δηλαδή, το μισό του 12 είναι το 6· το ένα τρίτο είναι το 4· το ένα τέταρτο είναι το 3· το ένα έκτο είναι το 2· και το ένα δωδέκατο είναι το 1. Και το άθροισμα όλων αυτών των μερών είναι το 16, το οποίο υπερβαίνει το πλήθος της συνολικής ποσότητας. Ομοίως, του αριθμού 24 το μισό είναι το 12· το ένα τρίτο είναι το 8· το ένα τέταρτο το 6· το ένα έκτο το 4· το ένα όγδοο το 3· το ένα δωδέκατο το 2· και το ένα εικοστό τέταρτο το 1· το άθροισμα όλων αυτών είναι το 36. Είναι φανερό και σε αυτό το παράδειγμα ότι το άθροισμα των μερών είναι μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό, σαν να υπερχειλίζει. Και πραγματικά, αυτός ο αριθμός, επειδή τα μέρη υπερβαίνουν το συνολικό αριθμό, ονομάζεται υπερτελής. Αντιθέτως, ελλιπής ονομάζεται ο αριθμός στον οποίο το άθροισμα των μερών του είναι μικρότερο από το πλήθος του συνόλου· τέτοιοι αριθμοί είναι το 8 και το 14. Διότι το μισό του 8 είναι το 4, το ένα τέταρτο είναι το 2 και το ένα όγδοο είναι το 1· των οποίων το άθροισμα είναι το 7, δηλαδή μικρότερο από το συνολικό αριθμό. Και πάλι, το μισό του 14 είναι το 7, το ένα έβδομο το 2 και το ένα δέκατο τέταρτο το 1· των οποίων το άθροισμα είναι 10, δηλαδή μικρότερο από το συνολικό όρο. Τέτοιοι επομένως είναι αυτοί οι αριθμοί, ώστε οι πρώ-

τοι, οι υπερτέλειοι, καθώς υπερβαίνονται από τα μέρη τους, μοιάζουν με κάποιον που γεννήθηκε με πολλά χέρια, κατά έναν τρόπο διαφορετικό από τη συνηθισμένη τάξη της φΰσης, όπως υπήρξε ο εκατόγχειρας γίγαντας Βριάρεως, ή με κάποιον που το κορμί του σχηματίστηκε από την ένωση τριών σωμάτων, όπως ήταν τριπλός ο Γηρυόνης, ή κάποιο άλλο δημιούργημα της φύσης, που καταδικάστηκε να είναι τερατώδες εξαιτίας του πολλαπλασιασμού των μερών του. Αντίθετα, οι τελευταίοι αυτών των αριθμών, οι ελλιπείς, μοιάζουν με κάποιον που γεννήθηκε με έλλειψη κάποιου απαραίτητου οργάνου, όπως ο μονόφθαλμος Κύκλωπας, ή με την έλλειψη κάποιου μέλους.

Ανάμεσα όμως σε αυτούς -όπως ανάμεσα σε πράγματα που είναι εξίσου υπερβολικά- ο αριθμός που ονομάζεται τέλειος διαθέτει την ιδιοσυγκρασία ενός μέσου ορίου και ως προς αυτό μιμείται την αρετή. Αυτός δε μεγεθύνεται λόγω υπερβολικής προόδου, ούτε μειώνεται από μια υποχρεωτική ελάττωση· αλλά επιτυγχάνοντας το όριο ενός μέσου και όντας ίσος με τα μέρη του, ούτε ξεχειλίζει από υπεραφθονία, ούτε είναι ελλιπής λόγω ένδειας. Τέτοιου είδους είναι οι αριθμοί 6 και 28. Διότι το μισό του 6 είναι το 3· το ένα τρίτο είναι το 2· το ένα έκτο είναι 1, τα οποία αθροιζόμενα ισούνται με το συνολικό σώμα του αριθμού. Ομοίως, το μισό του 28 είναι το 14· το ένα έβδομο είναι το 4· το ένα τέταρτο είναι το 7· το ένα δέκατο τέταρτο είναι το 2· και ένα το εικοστό τέταρτο είναι το 1· το σύνολο των οποίων είναι 28.

Δεν πρέπει επίσης να παραλείψουμε να παρατηρήσουμε ότι όλα τα πολλαπλάσια ενός τέλειου αριθμού είναι υπερτελείς, ενώ, αντιθέτως, όλα τα υποπολλαπλάσια είναι ελλιπείς. Έτσι, για παράδειγμα, το 3 -το υποδιπλάσιο του 6- είναι ελλιπής, αλλά το 12 -το διπλάσιο του 6- είναι υπερτελής. Επίσης το 2 -το οποίο είναι υποτριπλάσιο του 6- είναι ελλιπής, αλλά το 18 -που είναι το τριπλάσιο του- είναι υπερτελής αριθμός. Και το ίδιο θα συμβαίνει στα άλλα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια. Επίσης είναι φανερό ότι ένας τέλειος αριθμός είναι το γεωμετρικό μέσο ανάμεσα στον υπερτελή και τον ελλιπή αριθμό. Έτσι, στους τρεις αριθμούς

3, 6, 12, το 6 είναι το γεωμετρικό μέσο ανάμεσα στο 3 και το 12· διότι όπως είναι το 3 προς το 6, έτσι είναι το 6 προς το 12. Ομοίως, το 28 είναι το γεωμετρικό μέσο ανάμεσα στο 14 και το 56, ο πρώτος από τους οποίους είναι ελλιπής και ο τελευταίος υπερτελής αριθμός.

Οι τέλειοι αριθμοί, επομένως, είναι υπέροχα παραδείγματα των αρετών που είναι ενδιάμεσα στην υπερβολή και την έλλειψη και δεν είναι αποκορυφώματα, όπως πίστευαν κάποιοι από τους αρχαίους. Και πραγματικά, το κακό αντιτίθεται στο κακό, αλλά και τα δύο αντιπαρατίθενται στο αγαθό. Το αγαθό όμως ποτέ δεν αντιτίθεται στο αγαθό, αλλά σε δύο κακά ταυτόχρονα. Έτσι, η ατολμία αντιτίθεται στο θράσος, ενώ και στα δύο είναι κοινή η ανάγκη αληθινού θάρρους· αλλά και τα δύο, η ατολμία και το θράσος, αντιτίθενται στη γενναιοψυχία. Η πανουργία επίσης αντιτίθεται στην ηλιθιότητα, ενώ έχουν κοινή την ανάγκη φρόνησης· ωστόσο και οι δύο αντιτίθενται στη σωφροσύνη. Ομοίως, η σπατάλη αντιτίθεται στην τσιγγουνιά, ενώ και στις δύο η στενοκεφαλιά είναι κοινή· και οι δύο αντιτίθενται στη γενναιοδωρία. Και κατά έναν όμοιο τρόπο συμβαίνει και με τις άλλες αρετές. Είναι επομένως φανερό ότι οι τέλειοι αριθμοί μοιάζουν πολύ με τις αρετές. Αλλά μοιάζουν με τις αρετές και όσον αφορά ένα άλλο θέμα· αυτοί δηλαδή βρίσκονται σπάνια, καθώς είναι λίγοι και παράγονται με σταθερή τάξη. Αντίθετα, ένα απέραντο πλήθος από υπερτελείς και ελλιπείς αριθμούς μπορεί να βρεθεί· αυτοί ούτε είναι διατεταγμένοι σε κανονική σειρά, ούτε και παράγονται από κάποιο συγκεκριμένο σκοπό. Μοιάζουν συνεπώς πολύ με τα ελαττώματα, που είναι πολυπληθή, υπέρμετρα και ασαφή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV

Σχετικά με τη γένεση του τέλειου αριθμού και την ομοιότητά του με την αρετή.

Εξαιτίας λοιπόν της σπανιότητας των τέλειων αριθμών, υπάρχει μόνο ένας ανάμεσα στο 1 και το 10, δηλαδή το 6· μόνο ένας ανάμεσα στο 10 και το 100, δηλαδή το 28· ανάμεσα στο 100 και το 1000 μόνο ένας, δηλαδή το 496· και ανάμεσα στο 1000 και το 10000 ο μόνος τέλειος αριθμός είναι το 8.128. Επιπλέον, οι τέλειοι αριθμοί λήγουν πάντα στους δυο άρτιους αριθμούς 6 και 8[15] όπως είναι προφανές από αυτούς που ήδη αναφέρθηκαν.

Η γένεση όμως των τέλειων αριθμών είναι ορισμένη και σταθερή και δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί παρά με έναν τρόπο. Τοποθετούνται οι αρτιάκις άρτιοι αριθμοί σε κανονική σειρά με αρχή τη μονάδα και ο πρώτος προστίθεται στο δεύτερο. Αν προκύψει από την πρόσθεση ένας πρώτος και ασύνθετος αριθμός, αυτός πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το δεύτερο από τους αρτιάκις άρτιους αριθμούς και το γινόμενο θα είναι ένας τέλειος αριθμός. Αν όμως από την πρόσθεση δεν παραχθεί ένας πρώτος και ασύνθετος αριθμός, αλλά ένας σύνθετος και δεύτερος αριθμός, τότε αυτός πρέπει να προσπεραστεί και να προστεθεί ο επόμενος αριθμός. Αν και αυτό το άθροισμα δεν είναι ένας πρώτος και ασύνθετος αριθμός, πρέπει να προστεθεί κι άλλος, και αυτό γίνεται μέχρι να βρεθεί ένας πρώτος αριθμός. Όταν λοιπόν βρεθεί αυτός, πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον τελευταίο από τους προστιθέμενους αρτιάκις άρτιους αριθμούς και το γινόμενο θα είναι ένας τέλειος αριθμός. Για παράδειγμα, στην ακολουθία των αρτιάκις άρτιων αριθμών 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, αν το 1 προστεθεί στο 2, το άθροισμα είναι 3, και επειδή το 3 είναι ένας πρώτος και ασύνθετος αριθμός, αυτός πολλαπλασιαζόμενος με το 2 θα παράγει τον τέλειο αριθμό 6. Αλλά το 28, ο επόμενος τέλειος αριθμός, παράγεται ως εξής: από την πρόσθεση του 1, του 2 και του 4 προκύπτει το 7, που είναι ένας πρώτος και ασύνθετος αριθμός, ο οποίος

πολλαπλασιαζόμενος με το 4, τον τελευταίο από τους αρτιάκις άρτιους, παράγει τον τέλειο αριθμό 28. Αφότου επομένως έχουν βρεθεί αυτοί οι δυο τέλειοι αριθμοί, 6 και 28, και άλλοι θα πρέπει να εξεταστούν με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, γιο να βρούμε τον επόμενο τέλειο αριθμό, προσθέτουμε τους αριθμούς 1, 2, 4 και 8, αλλά το άθροισμα αυτών είναι 15. Όμως αυτός είναι ένας δεύτερος και σύνθετος αριθμός· γιατί έχει το ένα τρίτο και το ένα πέμπτο μέρος, εκτός από το ένα δέκατο πέμπτο μέρος, τη μονάδα, που ονομάζεται από τον ίδιο. Αυτός επομένως πρέπει να προσπεραστεί και ο επόμενος αρτιάκις άρτιος, δηλαδή το 16, πρέπει να προστεθεί στο 15, και το άθροισμα θα είναι 31, που είναι ένας πρώτος και ασύνθετος αριθμός. Μετά, αν το άθροισμα πολλαπλασιαστεί με το 16, τον τελευταίο από τους χρησιμοποιηθέντες αρτιάκις άρτιους αριθμούς, το γινόμενο θα είναι 496, ο επόμενος τέλειος αριθμός μετά το 28. Επομένως, η μονάδα είναι δυνάμει, αν και όχι εν ενεργεία, η ίδια ένας τέλειος αριθμός. Γιατί αν ληφθεί πρώτη στην τάξη των αριθμών, θα βρεθεί να είναι πρώτη και ασύνθετη, και αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό της, παράγεται η ίδια μονάδα, που εν δυνάμει είναι ίση με τα μέρη της. Έτσι, η μονάδα είναι τέλεια σύμφωνα με τη δική της σωστή αρετή, είναι πρώτη και ασύνθετη και διατηρείται άθικτη όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό της.

Ο τρόπος εν τούτοις που παράγονται οι τέλειοι αριθμοί θα φανεί αμέσως με τον παρακάτω πίνακα:

Αρτιάκις άρτιοι	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Περιττοί παραγόμενοι από πρόσθεση των αρτιάκις άρτιων	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
Τέλειοι αριθμοί	1	6	28	*	496	*	8128	*	*		*	*	33550336

Οι αστερίσκοι σε αυτόν τον πίνακα δηλώνουν ότι οι περιττοί αριθμοί που βρίσκονται επάνω από αυτούς και παρήχθησαν από την πρόσθεση των αρτιάκις άρτιων αριθμών, είναι σύνθετοι και ως εκ τούτου ακατάλληλοι να σχηματίσουν τέλειους αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVI

Σχετικά με τη σχετική ποσότητα και τα είδη μεγαλύτερης και μικρότερης ανισότητας.

Η πρώτη διαίρεση της σχετικής ποσότητας είναι διπλή, γιατί ό,τι μετράται συγκρινόμενο με μια άλλη ποσότητα, είναι είτε ίσο είτε άνισο. Και ίσο είναι πράγματι καθετί που όταν συγκρίνεται με κάτι άλλο, είναι ούτε μικρότερο ούτε μεγαλύτερο. Αυτό το τμήμα όμως της σχετικής ποσότητας, δηλαδή η ισότητα, είναι φυσικά αδιαίρετη, γιατί δεν μπορεί να ειπωθεί ότι ένα μέρος ισότητας είναι διαφορετικό από ένα άλλο. Γιατί όλη η ισότητα στην κατάλληλη μέτρηση της διατηρεί ένα μέτρο. Επίσης, η συγκρινόμενη ποσότητα δεν έχει διαφορετική ονομασία από αυτήν με την οποία συγκρίνεται. Γιατί όπως ένας φίλος είναι φίλος ενός φίλου, και ένας γείτονας είναι γείτονας ενός γείτονα, έτσι και το ίσο λέγεται ότι είναι ίσο προς το ίσο. Αλλά για την άνιση ποσότητα υπάρχει μια διπλή διαίρεση, εφόσον αυτό που είναι άνισο μπορεί να χωριστεί στο μεγαλύτερο και το μικρότερο, τα οποία ονομάζονται αντίθετα το ένα προς το άλλο. Γιατί το μεγαλύτερο είναι μεγαλύτερο από το μικρότερο, και το μικρότερο είναι μικρότερο από το μεγαλύτερο. Έτσι και τα δύο δεν έχουν τις ίδιες ονομασίες, όπως παρατηρήθηκε στην περίπτωση της ίσης ποσότητας, αλλά ξεχωρίζουν από τα διαφορετικά ονόματα, όπως ο δάσκαλος από το μαθητή, ή όποια άλλα σχετικά που συγκρίνονται με αντίθετα και που έχουν διαφορετική ονομασία.

Στη μεγαλύτερη ανισότητα ωστόσο υπάρχουν πέντε είδη, το πολλαπλάσιο, το επιμόριο, το επιμερές, το πολλαπλασιεπιμόριο και το πολλαπλασιεπιμερές. Σε αυτά τα πέντε είδη, επομένως, της μεγαλύτερης ανισότητας αντιτίθεται πέντε άλλα μέρη μικρότερης ανισότητας, ακριβώς όπως το μεγαλύτερο αντιτίθεται πάντα στο μικρότερο. Αυτά τα είδη επίσης της μικρότερης ανισότητας έχουν τις ίδιες ονομασίες με εκείνα της μεγαλύτερης ανισότητας, με την πρόσθεση της πρόθεσης *υπό.* Έτσι ονομάζονται υποπολλαπλάσια, υποεπιμόριο, υποεπιμερές, υποπολλαπλασιεπιμόριο και υποπολλαπλασιεπιμερές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVII

Σχετικά με την πολλαπλάσια ανισότητα, τα είδη της και τη γένεση τους.

Το πολλαπλάσιο είναι το πρώτο είδος της μεγαλύτερης ανισότητας, το αρχαιότερο όλων των άλλων και εκ φύσεως το πιό ξεχωριστό, όπως θα δείξουμε σύντομα. Ο αριθμός αυτός εν τούτοις είναι τέτοιος που, συγκρινόμενος με έναν άλλο, τον περιέχει πάνω από μια φορά.

Επίσης, αυτή η πολλαπλάσια ανισότητα είναι η πρώτη που φαίνεται στη φυσική ακολουθία των αριθμών. Γιατί όλοι οι αριθμοί που ακολουθούν τη μονάδα, είναι πολλαπλάσιοι σε σχέση με αυτή. Έτσι, το 2 συγκρινόμενο με τη μονάδα είναι διπλάσιο˙ το 3 είναι τριπλάσιο· το 4 τετραπλάσιο· κι έτσι προχωρώντας στη σειρά, παράγονται όλες οι πολλαπλάσιες ποσότητες.

Η ανισότητα που αντιτίθεται σε αυτό ονομάζεται υποπολλαπλάσια και αυτή είναι το πρώτο είδος της μικρότερης ποσότητας. Αυτός ο αριθμός είναι τέτοιος που, συγκρινόμενος με κάποιον άλλο, περιέχεται στο σύνολο του μεγαλύτερου αριθμού πάνω από μια φορά. Αν επομένως ο μικρότερος αριθμός περιέχεται στο μεγαλύτερο μόνο δυό φορές, ονομά-

ζεται υποδιπλάσιο, αν τρεις φορές, υποτριπλάσιο, αν τέσσερις φορές, υποτετραπλάσιο· και ούτω καθεξής επ' άπειρον. Διαμορφώνουν δε το άνομα τους πάντα με την πρόσθεση της πρόθεσης *υπό.*

Εφόσον όμως η πολλαπλασιότητα[16] και η υποπολλαπλασιότητα είναι εκ φύσεως άπειρες, οι ανάλογες γενέσεις των ειδών επιτρέπουν επίσης άπειρη θεώρηση. Γιατί αν διαταχθούν αριθμοί σε μια φυσική ακολουθία και οι διάφοροι άρτιοι αριθμοί ξεχωρισθούν σε μια συνεχή τάξη, αυτοί οι άρτιοι αριθμοί θα είναι διπλάσιοι από όλους τους άρτιους και περιττούς αριθμούς που αρχίζουν από τη μονάδα και ακολουθούν ο ένας τον άλλο. Αυτό συμβαίνει επ' άπειρον. Ας πάρουμε λοιπόν αυτή τη φυσική ακολουθία αριθμών, δηλαδή 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Αν λοιπόν στην ακολουθία αυτή πάρουμε τον πρώτο άρτιο αριθμό, δηλαδή το 2, αυτός θα είναι το διπλάσιο του πρώτου, δηλαδή της μονάδας. Και αν πάρουμε τον επόμενο άρτιο αριθμό 4, αυτός θα είναι το διπλάσιο του δεύτερου, δηλαδή του 2. Αν πάρουμε τον τρίτο άρτιο αριθμό 6, αυτός θα είναι το διπλάσιο του τρίτου αριθμού στη φυσική ακολουθία, δηλαδή του 3. Και αν πάρουμε τον τέταρτο άρτιο αριθμό, δηλαδή το 8, αυτός θα είναι το διπλάσιο του τέταρτου αριθμού 4. Το ίδιο πράγμα θα συμβαίνει χωρίς κανένα εμπόδιο για τους υπόλοιπους της ακολουθίας επ' άπειρον.

Οι τριπλάσιοι αριθμοί παράγονται, αν στην ίδια φυσική ακολουθία παραλείπονται πάντα δύο όροι και οι επόμενοι συγκρίνονται με το φυσικό αριθμό. Το 3 εξαιρείται, επειδή όντας τριπλάσιος της μονάδας, παραλείπεται μόνο το 2. Μετά το 1 και το 2 επομένως, ακολουθεί το 3 που είναι τριπλάσιο της μονάδας. Και πάλι, το 6 βρίσκεται αμέσως μετά το 4 και το 5 και είναι τριπλάσιο του δεύτερου αριθμού 2. Ο αριθμός 9 ακολουθεί το 7 και το 8 και είναι τριπλάσιος του τρίτου αριθμού 3. Και ομοίως συνεχίζεται επ' άπειρον.

Αλλά η γένεση των τετραπλάσιων αριθμών αρχίζει με την παράλειψη 3 όρων. Μετά το 1, 2 και 3 ακολουθεί το 4, που είναι τετραπλάσιο του πρώτου όρου 1. Και πάλι, παραλείποντας το 5, 6 και 7, ο αριθμός 8 που είναι ο τέταρτος επόμε-

νος όρος, είναι τετραπλάσιος του δεύτερου όρου 2. Και μετά το 8, παραλείποντας τους τρεις όρους 9, 10 και 11, ο επόμενος αριθμός 12 είναι τετραπλάσιος του τρίτου όρου 3. Αυτή πρέπει να είναι η διαδικασία σε μια πρόοδο επ' άπειρον. Αν δε κάθε φορά παραλείπεται ένας επιπλέον όρος, διαφορετικά πολλαπλάσια αριθμών θα εμφανίζονται με θαυμαστή τάξη. Γιατί με την παράλειψη τεσσάρων όρων θα παραχθεί ένα πενταπλάσιο πολλαπλάσιο, με πέντε ένα εξαπλάσιο, με έξι ένα επταπλάσιο, με επτά ένα οκταπλάσιο, και ούτω καθεξής. Επίσης το όνομα του πολλαπλάσιου θα δηλώνει πάντα ένα παραπάνω από εκείνο των όρων που παραλείπονται.

Όλοι οι διπλάσιοι όροι πραγματικά είναι άρτιοι. Αλλά από τους τριπλάσιους όρους, ένας είναι πάντα περιττός και ένας άλλος άρτιος. Οι τετραπλάσιοι αριθμοί πάλι διατηρούν πάντα μια άρτια ποσότητα. Αυτοί σχηματίζονται από τον τέταρτο αριθμό και ένας από τους προηγούμενους άρτιους αριθμούς στη σειρά παραλείπεται, πρώτα ο άρτιος αριθμός 2, μετά παραλείπεται το 6 και ακολουθεί το 8, ο επόμενος τετραπλάσιος όρος· και μετά το 8, ακολουθεί ο τετραπλάσιος αριθμός 12, ο άρτιος αριθμός 10 παραλείφθηκε. Και ούτω καθεξής στη συνέχεια. Αλλά το πενταπλάσιο μοιάζει με το τριπλάσιο πολλαπλάσιο, γιατί σε αυτό οι άρτιοι και οι περιττοί όροι έχουν μια εναλλασσόμενη διάταξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVIII

Σχετικά με τον επιμόριο αριθμό, τα είδη του, τη γένεση αυτών κ.λπ.

Όταν ένας αριθμός εμπεριέχει ολόκληρο έναν άλλο αριθμό και επιπλέον κάποιο μέρος αυτού, ονομάζεται επιμόριος. Αν τούτο το επιπλέον περιεχόμενο μέρος είναι το μισό, ονομάζεται ημιόλιος, αν το ένα τρίτο αυτού, επίτριτος· αν το ένα τέταρτο, επιτέταρτος· αν το ένα πέμπτο, επίπεμπτος. Κα-

θώς τα παρόμοια ονόματα χρησιμοποιούνται επ' άπειρον, έτσι και η μορφή των επιμόριων αριθμών θα προοδεύει επ' άπειρον. Και οι μεγαλύτεροι αριθμοί πραγματικά ονομάζονται κατ' αυτόν τον τρόπο. Αλλά οι μικρότεροι, οι οποίοι εμπεριέχονται στο μεγαλύτερο μαζί με κάποιο μέρος τους, ονομάζονται διαφορετικά· υφημιόλιος, υπεπίτριτος και ούτω καθεξής, σύμφωνα με τον κανόνα και το πλήθος των μεγαλύτερων αριθμών. Επίσης, οι μεγαλύτεροι αριθμοί ονομάζονται ηγέτες, ενώ οι μικρότεροι ακόλουθοι.

Παρομοίως, το πλήθος των επιμόριων αριθμών είναι άπειρο· γιατί η πρόοδος των ειδών τους είναι απεριόριστη. Γιατί ο ημιόλιος λόγος σχηματίζεται έχοντας στη θέση του ηγέτη τους αριθμούς που βρίσκονται εκ φύσεως τριπλάσιοι[17] μετά το 3· ενώ για ακόλουθους έχει όλους τους αριθμούς που βρίσκονται εκ φύσεως άρτιοι μετά το 2. Αυτό διαπιστώνεται αν παρατηρήσουμε τις ακολουθίες των φυσικών, των τριπλάσιων και των διπλάσιων αριθμών διατεταγμένες ως ακολούθως:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Η πρώτη σειρά επομένως περιέχει την ακολουθία των φυσικών αριθμών η δεύτερη τους τριπλάσιους αυτών και η τρίτη τους διπλάσιους. Έτσι, αν το 3 συγκριθεί με το 2, ή το 6 με το 4, ή το 9 με το 6, ή αν όλοι οι ανώτεροι τριπλάσιοι αντιταχθούν σε όλους τους κατώτερους διπλάσιους αριθμούς, θα παραχθεί ημιόλιος λόγος. Γιατί το 3 περιέχει μέσα του το 2 και το 1, το μισό του 2. Το 6 επίσης περιέχει μέσα του το 4 και το μισό του 4, το 2. Και το 9 περιέχει μέσα του το 6 και το μισό του 6, το 3. Και με παρόμοιο τρόπο αυτό συμβαίνει και στα υπόλοιπα.

Είναι επίσης αναγκαίο να δείξουμε τη μέθοδο ανακάλυψης του επίτριτου, δηλαδή του δεύτερου είδους του επιμόριου αριθμού. Και ο ορισμός πραγματικά αυτής της σύγκρισης είναι ο ακόλουθος: επίτριτος είναι αυτός που όταν συγκριθεί με το μικρότερο αριθμό, τον περιέχει μια φορά και

το ένα τρίτο αυτού επιπλέον. Οι αριθμοί αυτοί βρίσκονται αν όλοι οι τετραπλάσιοι όροι σε μια συνεχή ακολουθία από το 4, συγκριθούν με όλους τους τριπλάσιους αριθμούς από το 3. Στην περίπτωση αυτή στη θέση του αριθμητή θα είναι οι τετραπλάσιοι, ενώ στη θέση του παρανομαστή οι τριπλάσιοι. Ας δούμε την ακολουθία των φυσικών αριθμών τοποθετώντας από κάτω αυτή των τετραπλάσιων και αυτή των τριπλάσιων. Ας τοποθετήσουμε λοιπόν τον πρώτο τριπλάσιο κάτω από τον τετραπλάσιο αριθμό· το δεύτερο κάτω από το δεύτερο˙ τον τρίτο κάτω από τον τρίτο· και ας διευθετήσουμε όλους τους τριπλάσιους κάτω από όλους τους τετραπλάσιους κατά τον ακόλουθο τρόπο:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	8	12	16	20	24	28	32
3	6	9	12	15	18	21	24

Έτσι, αν ο πρώτος τετραπλάσιος αριθμός συγκριθεί με τον πρώτο τριπλάσιο, θα σχηματιστεί ένας επίτριτος λόγος. Γιατί το 4 εμπεριέχει όλο το 3 και επιπλέον το ένα τρίτο του 3, δηλαδή το 1. Με παρόμοιο τρόπο το 8 περιέχει όλο το 6 και το ένα τρίτο αυτού, δηλαδή το 2. Η ίδια σχέση θα εμφανίζεται στους υπόλοιπους επ' άπειρον. Πρέπει επίσης να παρατηρηθεί ότι οι 3, 6, 9, 12 κ.λπ. είναι ακόλουθοι και οι 4, 8, 12, 16 κ.λπ. είναι ηγέτες και ότι ο λόγος των πρώτων προς τους δεύτερους είναι υπεπίτριτος, ενώ των δεύτερων προς τους πρώτους επίτριτος.

Είναι επίσης αξιοθαύμαστο και ολοφάνερο στις ακολουθίες αυτών των αριθμών ότι ο πρώτος ηγέτης και ο πρώτος ακόλουθος συνδέονται χωρίς τη μεσολάβηση κανενός άλλου αριθμού. Αλλά ανάμεσα στο δεύτερο ηγέτη και το δεύτερο ακόλουθο παρεμβαίνει ένας αριθμός. Ανάμεσα σε αυτούς της τρίτης σειράς παρεμβαίνουν δύο αριθμοί. Ανάμεσα σε εκείνους της τέταρτης παρεμβάλλονται τρεις. Και οι παρεμβαλλόμενοι αριθμοί είναι πάντα κατά ένα μικρότεροι από τη σειρά των ίδιων των αριθμών. Αλλά είναι αναγκαίο αυτό στα ημιόλιο, επίτριτα ή άλλα επιμόρια μέρη. Έτσι, όταν το 4

συγκριθεί με το 3, δεν παρεμβάλλεται κανένας αριθμός, εφόσον το 4 έπεται αμέσως του 3. Αλλά όταν το 8 συγκριθεί με το 6, σχηματίζοντας το δεύτερο επίτριτο λόγο, παρεμβάλλεται ένας αριθμός, γιατί υπάρχει το 7 ανάμεσα στο 6 και το 8. Και πάλι, όταν το 12 συγκρινόμενο με το 9 σχηματίζει τον τρίτο επίτριτο λόγο, παρεμβάλλονται δύο αριθμοί, δηλαδή το 10 και το 11. Σύμφωνα με τον ίδιο τρόπο, ανάμεσα σε εκείνους της τέταρτης σειράς παρεμβάλλονται τρεις αριθμοί· ανάμεσα σε εκείνους της πέμπτης, τέσσερις αριθμοί· και αυτό συνεχίζεται επ' άπειρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIX

Το πολλαπλάσιο είναι αρχαιότερο από τα άλλα είδη ανισότητας.

Για να αποδείξουμε αυτό, ας πάρουμε πρώτα μια ακολουθία από αριθμούς σε φυσική τάξη μέχρι το 10. Στη δεύτερη γραμμή ας παρατάξουμε την τάξη των διπλάσιων, στην τρίτη αυτήν των τριπλάσιων, στην τέταρτη αυτή των τετραπλάσιων και ούτω καθεξής μέχρι την τάξη των δεκαπλάσιων. Με αυτόν τον τρόπο θα γνωρίσουμε ότι το είδος του πολλαπλάσιου προηγείται από αυτό του επιμόριου, του επιμέρους και όλα τα άλλα είδη ανισότητας. Ταυτόχρονα θα αντιληφθούμε και άλλα πράγματα, που είναι εξαιρετικά δυσδιάκριτα αλλά ιδιαίτερα χρήσιμα από επιστημονική άποψη, τα οποία προσφέρουν την πλέον ευχάριστη άσκηση στη σκέψη.

Αν επομένως εξεταστούν οι δύο πρώτες πλευρές που σχηματίζουν μια γωνία στον παρακάτω πίνακα, δηλαδή αν η μία από αυτές, που προχωρά από το 1 ως το 10, συγκριθεί με τις κατώτερες τάξεις που αρχίζουν από τη γωνία του 4 και τελειώνουν στο 20, θα εμφανιστεί το διπλάσιο, δηλαδή το πρώτο είδος της πολλαπλασιότητας. Έτσι, η πρώτη θα υπερβαίνει την πρώτη κατά τη μονάδα μονάχα, όπως το 2 υπερβαίνει το 1. Η δεύτερη θα υπερβαίνει τη δεύτερη κατά 2, όπως

Αυτός ο Πίνακας ονομάζεται Πυθαγόρειος, επειδή λέγεται πως ο Πυθαγόρας είναι ο δημιουργός του.

Μήκος

Πλάτος | **Πλάτος**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Μήκος

το 4 υπερβαίνει το 2. Η τρίτη θα υπερβαίνει την τρίτη κατά 3, όπως το 6 υπερβαίνει το 3. Η τέταρτη θα υπερβαίνει την τέταρτη κατά 4, και κατά τον τρόπο αυτό το 8 υπερβαίνει το 4. Κατά έναν όμοιο τρόπο συμβαίνει και στις υπόλοιπες. Αλλά αν εξεταστεί η τρίτη γωνία, η οποία αρχίζει από το 9 και εκτείνεται εξίσου σε μήκος και πλάτος μέχρι τον αριθμό 30, και συγκριθεί με το πρώτο μήκος και πλάτος, θα εμφανιστεί το τριπλάσιο είδος της πολλαπλασιότητας, έτσι που η σύγκριση θα συμβεί μέσω της έντονα γραμμογραφημένης γωνίας. Και οι αριθμοί αυτοί θα υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο σύμφωνα με μια φυσική πρόοδο του άρτιου αριθμού. Διότι ο πρώτος αριθμός θα υπερβαίνει τον πρώτο κατά 2, όπως το 3 υπερβαίνει το 1. Ο δεύτερος θα υπερβαίνει το δεύτερο κατά 4, όπως το 6 υπερβαίνει το 2. Ο τρίτος θα υπερβαίνει τον τρίτο κατά 6, όπως το 9 υπερβαίνει το 3. Κατά τον ίδιο τρό-

πο προόδου θα αυξάνονται και οι υπόλοιποι. Αν τώρα εξεταστεί το όριο της τέταρτης γωνίας, το οποίο διακρίνεται από την ποσότητα του αριθμού 16 και εκτείνεται σε μήκος και πλάτος μέχρι τον αριθμό 40, και αν γίνει μια παρόμοια πορεία σύγκρισης, θα αποκαλυφθεί το τετραπλάσιο είδος πολλαπλασιότητας. Έτσι, ο πρώτος θα υπερβαίνει τον πρώτο κατά 3, όπως το 4 υπερβαίνει τη μονάδα. Ο δεύτερος θα υπερβαίνει το δεύτερο κατά 6, όπως το 8 υπερβαίνει το 2, ο τρίτος τον τρίτο κατά 9, όπως το 12 το 3. Και κατά έναν όμοιο τρόπο θα συμβαίνει σε όλους τους υπόλοιπους αριθμούς. Εάν οι υπόλοιπες γωνίες εξεταστούν ομοίως, το ίδιο πράγμα θα συμβαίνει σε όλα τα είδη πολλαπλασιότητας μέχρι το δεκαπλάσιο είδος.

Αν, όμως, στην περιγραφή αυτή ζητηθούν τα είδη των επιμόριων, αυτοί μπορούν να βρεθούν με την παρακάτω μέθοδο. Ας στρέψουμε την προσοχή μας στη δεύτερη γωνία, η αρχή της οποίας είναι το 4, πάνω από το οποίο είναι το 2. Εάν τώρα η σειρά στην οποία βρίσκεται το 4, συγκριθεί με τη σειρά αμέσως κάτω από αυτήν, θα αποκαλυφθεί ένας ημιόλιος λόγος. Έτσι, το 3 προς το 2, ή το 6 προς το 4, ή το 9 προς το 6, ή το 12 προς το 8, είναι ημιόλιος λόγος. Το ίδιο θα αποκαλύπτεται και με τους υπόλοιπους. Εν τούτοις σε αυτή την περίπτωση ο ένας αριθμός υπερβαίνει τον άλλο κατά την ίδια ποσότητα που υπερβαίνουν οι διπλάσιοι τους φυσικούς αριθμούς. Γιατί ο πρώτος υπερβαίνει τον πρώτο κατά 1, όπως το 3 υπερβαίνει το 2. Ο δεύτερος υπερβαίνει το δεύτερο κατά 2. Ο τρίτος υπερβαίνει τον τρίτο κατά 3 και ούτω καθεξής. Αν πάλι συγκριθεί η τέταρτη τάξη με την τρίτη, όπως το 4 με το 3, το 8 με το 6, το 12 με το 9, κ.λπ. θα εμφανιστεί ο επίτριτος λόγος.

Επίσης, το αξιοθαύμαστο στον πίνακα είναι ότι όλοι οι γωνιακοί αριθμοί είναι τετράγωνοι. Τετράγωνος αριθμός είναι εν συντομία εκείνος που παράγεται από τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τον εαυτό του. Έτσι στον πίνακα αυτό, το ένα πολλαπλασιαζόμενο με τον εαυτό του είναι ένα, και αυτό είναι εν δυνάμει ως προς την ικανότητα ένα τετράγωνο. Επίσης, δύο φορές το 2 κάνει 4, τρεις φορές το 3 εί-

ναι 9, τέσσερις φορές το 4 είναι 16· και το ίδιο συμβαίνει και στους υπόλοιπους. Αλλά οι αριθμοί που περιβάλλουν τους γωνιακούς αριθμούς, είναι ετερομήκεις. Είναι δηλαδή τέτοιοι που παράγονται από τον πολλαπλασιασμό δυο αριθμών που διαφέρουν μεταξύ τους κατά τη μονάδα. Για παράδειγμα, το 2 και το 6 περιβάλλουν το 4· αλλά το 2 παράγεται από τον πολλαπλασιασμό του 1 με το 2 και το 2 διαφέρει από το 1 κατά 1. Το 6 πάλι παράγεται από τον πολλαπλασιασμό του 2 με το 3· και αυτά διαφέρουν μεταξύ τους κατά τη μονάδα. Ομοίως, το 6 και το 12 περιβάλλουν το 9· και το 12 σχηματίζεται από το 3 πολλαπλασιαζόμενο με το 4, ενώ το 6 από το 2 πολλαπλασιαζόμενο με το 3. Όλοι αυτοί παράγονται από πλευρές που διαφέρουν η μια από την άλλη κατά μια μονάδα. Ομοίως οι αριθμοί που περιβάλλουν και τους άλλους γωνιακούς αριθμούς, θα βρεθούν να είναι ετερομήκεις.

Και πάλι, αν προστεθεί το άθροισμα δύο ετερομηκών αριθμών με το διπλάσιο του τετράγωνου που περιβάλλουν, θα σχηματιστεί ένας τετράγωνος αριθμός. Δηλαδή 2+6 προστιθέμενο στο 4x2 ισούται με 16. Ομοίως 6+12 προστιθέμενο στο 9x2 ισούται με 36. Το ίδιο παρατηρείται και στους υπόλοιπους.

Τετράγωνος επίσης θα σχηματιστεί από το άθροισμα δύο κοντινών τετράγωνων μαζί με το διπλάσιο του ενδιάμεσου ετερομήκους αριθμού. Έτσι στην ακόλουθη σειρά, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, στην οποία ανάμεσα σε δύο κοντινούς τετράγωνους υπάρχει ένας ετερομήκης αριθμός, εαν το 4 προστεθεί στο 1 και στο διπλάσιο του 2, το άθροισμα θα είναι το 9. Επίσης, το 4+9 και προστιθέμενο στο διπλάσιο του 6, ισούται με 25. Ομοίως, το 9 προστιθέμενο στο 16, προστιθέμενο στο 12 x 2, ισούται με 49. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους. Από αυτό το άθροισμα είναι φανερό ότι οι τετράγωνοι που σχηματίζονται είναι περιττοί αριθμοί, ενώ εκείνοι που δημιουργούνται από το προηγούμενο άθροισμα είναι άρτιοι αριθμοί. Διότι τα 9, 25, 49, κ.λπ. είναι περιττοί και τα 16, 36, 64 κ.λπ. είναι άρτιοι αριθμοί.

Επιπλέον, από τις μονάδες ή ενάδες στις τέσσερις γωνίες του πίνακα, η πρώτη και η τρίτη είναι τετράγωνοι αριθμοί δηλαδή το 1 και το 100· ενώ, οι άλλες γωνίες έχουν τις δύο άλλες μονάδες 10 και 10. Επιπροσθέτως, το γινόμενο που παράγεται από τον πολλαπλασιασμό των δύο τετράγωνων 1 και 100, ισούται με εκείνο των δύο άλλων μονάδων πολλαπλασιαζόμενων μεταξύ τους, δηλαδή ισούται με 10 x 10. Αυτοί οι τετράγωνοι επίσης τέμνουν τον πίνακα σε δύο ίσα τρίγωνα. Συνιστούν επίσης, κατά κάποιο τρόπο, τη διάμετρο του σχήματος και για αυτό καλούνται διαμετρικοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XX

Σχετικά με το τρίτο είδος ανισότητας, τους αποκαλούμενους επιμερείς αριθμούς, τα είδη τους και τη γένεση τους.

Μετά από τα δύο πρώτα είδη, τον πολλαπλάσιο και τον επιμόριο, και τις καταστάσεις που βρίσκονται κάτω από αυτούς, δηλαδή τον υποπολλαπλάσια και τον υπεπιμόριο εμφανίζεται το τρίτο είδος ανισότητας, το οποίο έχουμε ήδη ονομάσει επιμερές. Αυτό το είδος εμφανίζεται όταν ένας αριθμός συγκρινόμενος με άλλον, τον περιέχει ολόκληρο και επί πλέον κάποια μέρη αυτού, όπως δύο, τρία, ή τέσσερα μέρη, ή οποιοδήποτε άλλο μέρος μπορεί να προκύψει από τη σύγκριση. Αυτή η κατάσταση ξεκινά από τα δύο τρίτα. Διότι αν ένας αριθμός περιέχει έναν άλλο αριθμό ολόκληρο και επιπλέον τα δύο μισά αυτού, ο λόγος θα είναι δύο προς ένα αντί για επιμερής. Αλλά αν ο μεγαλύτερος περιέχει το όλο του μικρότερου και τα δύο τρίτα αυτού, τότε θα υπερβαίνει το μικρότερο κατά περιττούς αριθμούς. Γιατί, εάν τον εμπεριέχει ολόκληρο και τα δύο τέταρτα αυτού, ο λόγος θα είναι αναγκαστικά επιμόριος, εφόσον τα δύο τέταρτα ισούνται με το μισό, άρα η σύγκριση θα είναι ημιόλιο. Εάν πάλι περιέχει τα δύο έκτα, πάλι ο λόγος θα είναι επιμόριος, εφόσον τα

δύο έκτα είναι όμοια με το ένα τρίτο. Και αυτό στη σύγκριση θα παράγει το είδος της επίτριτης κατάστασης. Μετά από αυτά θα προκύψουν οι ακόλουθοι που ονομάζονται υπεπιμερείς. Αυτοί όμως είναι τέτοιοι που περιέχονται σε άλλον αριθμό μαζί με δύο, τρία, τέσσερα, ή οσαδήποτε μέρη τους επιπλέον. Αν, επομένως, ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλο αριθμό και δύο μέρη αυτού επιπλέον, ονομάζεται επιδιμερής, εάν τρία μέρη, επιτριμερής, εάν τέσσερα, επιτετραμερής και ούτω καθεξής επ' άπειρον.

Αλλά η τάξη αυτών είναι φυσική. Ας τοποθετηθούν όλοι οι άρτιοι και περιττοί αριθμοί που ορίζονται φυσικά από το 3 και μετά. Κάτω από αυτούς ας τοποθετηθούν όλοι οι περιττοί αριθμοί που αρχίζουν από το 5. Μετά από μια τέτοια τοποθέτηση, αν ο πρώτος συγκριθεί με τον πρώτο, ο δεύτερος με το δεύτερο, ο τρίτος με τον τρίτο και οι υπόλοιποι με τους υπόλοιπους, θα παραχθεί μια επιμερής κατάσταση. Τούτο γίνεται φανερό από την ακόλουθη διάταξη:

3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	9	11	13	15	17	19

Εάν επομένως, η σύγκριση του 5 με το 3 ερευνηθεί, θα βρεθεί εκείνος ο επιμερής που ονομάζεται επιδιμερής, εφόσον το 5 εμπεριέχει το όλον του 3 και επιπλέον δύο μέρη αυτού, δηλαδή το 2. Αλλά αν συγκριθεί το 7 με το 4, ο λόγος θα είναι επιτριμερής, εφόσον το 7 περιέχει το όλον του 4 και τρία μέρη αυτού επιπλέον. Και στους επόμενους αριθμούς, όλα τα είδη επιμέρους αναλογίας θα βρίσκονται σε μια κανονική πρόοδο.

Ο τρόπος όμως με τον οποίο παράγεται καθένας από αυτούς επ' άπειρον είναι ο ακόλουθος. Εάν καθένας από τους όρους που σχηματίζουν την επιδιμερή κατάσταση διπλασιαστεί, θα παράγεται πάντοτε επιδιμερής κατάσταση. Έτσι, διπλασιάζοντας το 3 και το 5, θα παραχθούν το 6 και το 10 και οι αριθμοί αυτοί θα σχηματίσουν ένα επιδιμερή λόγο. Αν αυτοί πάλι διπλασιαστούν, η ίδια τάξη λόγου θα προκύψει. Συνεχίζοντας λοιπόν κατά αυτόν τον τρόπο επ' άπειρον, η ίδια κατάσταση θα παραμένει.

Για να βρούμε τώρα επιτριμερείς καταστάσεις, οι πρώτοι επιτριμερείς 7 και 4 πρέπει να τριπλασιαστούν, οπότε αριθμοί αυτού του είδους θα παραχθούν. Αν πάλι οι παραχθέντες τριπλασιαστούν εκ νέου, ο ίδιος λόγος θα σχηματιστεί.

Με σκοπό επίσης να παράγουμε επιτετραμερείς καταστάσεις επ' άπειρον, οι πρώτες ρίζες αυτών, δηλαδή το 9 και το 5, πρέπει να πολλαπλασιαστούν με το 4. Αν τα γινόμενα αυτού του πολλαπλασιασμού επίσης τετραπλασιασμούς, ο ίδιος λόγος θα παρουσιαστεί. Τα άλλα είδη ομοίως θα παραχθούν, αυξάνοντας κάθε φορά τις ρίζες με πολλαπλασιασμό. Οι αριθμοί στον παραπάνω πίνακα ονομάζονται ρίζες, διότι όλες οι προαναφερόμενες καταστάσεις (είδη) παράγονται από αυτούς. Στον επιδιμερή λόγο επίσης, επειδή ο μεγαλύτερος περιέχει το μικρότερο και τα δύο τρίτα αυτού, η κατάσταση ονομάζεται επιδιμερής τρίτων. Ομοίως, ο επιτριμερής λόγος ονομάζεται επιτριμερής τετάρτων, επειδή ο μεγαλύτερος περιέχει το μικρότερο και επιπλέον τρία τέταρτα αυτού. Έτσι πάλι, ο επιτετραμερής ονομάζεται επιτετραμερής πέμπτων και ούτω καθεξής. Συνεπώς ο λόγος που ονομάζεται επιδιμερής, μπορεί επίσης να ονομαστεί επιδίτριτος. Εκείνος που ονομάζεται επιτριμερής, μπορεί επίσης να ονομαστεί επιτριτέταρτος. Και εκείνος που ονομάζεται επιτετραμερής, μπορεί ομοίους να ονομαστεί επιτετράπεμπτος. Και ονόματα μπορούν να παράγονται επ' άπειρον σύμφωνα με την ίδια αντιστοιχία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXI

Σχετικά με τον πολλαπλασιεπιμόριο και τον πολλαπλασιεπιμερή λόγο.

Αυτά επομένως είναι τα απλά και πρώτα είδη της σχετικής ποσότητας. Υπάρχουν όμως δύο άλλα είδη που συντίθενται από αυτά, σαν από κάποιες αρχές. Αυτά είναι ο πολλαπλασιεπιμόριος και ο πολλαπλασιεπιμερής καθώς και οι ακόλουθοι αυτών, ο υποπολλαπλασιεπιμόριος και ο υποπολ-

λαπλασιεπιμερής. Σε αυτούς, όπως στους προαναφερθέντες λόγους, οι μικρότεροι αριθμοί και τα είδη τους ονομάζονται με την πρόσθεση της πρόθεσης *υπό.* Ας δούμε πως ορίζονται. Πολλαπλασιεπιμόριος λόγος παράγεται όταν ένας αριθμός, συγκρινόμενος με έναν άλλο, περιέχει αυτόν περισσότερο από μια φορά και επιπλέον ένα μέρος αυτού· δηλαδή περιέχει το διπλάσιο ή το τριπλάσιο ή το τετραπλάσιο ή κάποιο άλλο πολλαπλάσιο αυτού, και ένα μέρος του επιπλέον, όπως το μισό, το ένα τρίτο, το ένα τέταρτο, ή κάποιο άλλο μέρος. Άρα, ο λόγος αυτός συντίθεται και από τον πολλαπλάσιο και από τον επιμόριο. Ο αριθμός, επομένως, που περιέχει το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού και το ένα δεύτερο αυτού ονομάζεται διπλασιεφήμισυς. Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τρίτο, είναι διπλασιεπίτριτος. Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τέταρτο, είναι διπλασιεπιτέταρτος και ούτω καθεξής. Επίσης, εάν ένας αριθμός περιέχει το όλον ενός άλλου τρεις φορές και το μισό, το ένα τρίτο ή το ένα τέταρτο αυτού, ονομάζεται τριπλασιεφήμισυς, τριπλασιεπίτριτος, τριπλασιεπιτέταρτος. Κατά τον ίδιο τρόπο ονομάζονται και οι υπόλοιποι. Και το πόσες φορές ο αριθμός εμπεριέχει το όλον του μικρότερου αριθμού, καθορίζεται από το είδος του πολλαπλάσιου· αλλά όσον αφορά το συγκρινόμενο αριθμό που περιέχει, θα χαρακτηριστεί σύμφωνα με μια επιμόρια σύγκριση και κατάσταση. Παραδείγματα αυτών είναι τα ακόλουθα. Διπλασιεφήμισυς λόγος είναι αυτός του 5 προς το 2, διότι το 5 περιέχει το 2 δύο φορές, καθώς και το μισό αυτού, που είναι το 1. Αλλά διπλασιεπιτέταρτος λόγος είναι αυτός του 9 προς το 4. Και διπλασιεπίπεμπτος λόγος είναι αυτός του 11 προς το 5.

Επίσης, αυτοί οι λόγοι θα παράγονται πάντοτε, αν οι αριθμοί που είναι φύσει άρτιοι και περιττοί, τοποθετούμενοι σε τάξη αρχίζοντας από το 2, 'συγκριθούν με τους περιττούς αριθμούς που αρχίζουν από το 5· δηλαδή αν ο πρώτος συγκριθεί με τον πρώτο, ο δεύτερος με το δεύτερο, ο τρίτος με τον τρίτο, και ούτω καθεξής όπως στον πίνακα που ακολουθεί:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Αλλά αν οι άρτιοι αριθμοί που τοποθετήθηκαν αρχίζοντας από το 2 συγκριθούν με εκείνους που, αρχίζοντας από το 5, υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 5, θα παραχθούν διπλασιεφημίσεις λόγοι όπως γίνεται φανερό από τον ακόλουθο πίνακα:

2	4	6	8	10	12
5	10	15	20	25	30

Αν η ακολουθία που αρχίζει από το 3, της οποίας οι αριθμοί υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 3, συγκριθεί με εκείνη που αρχίζει από το 7, και της οποίας οι αριθμοί υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 7, θα παράγει διπλασιεπίτριτους λόγους, όπως παρακάτω;

3	6	9	12	15	18	21
7	14	21	28	35	42	49

Επίσης, αν τα τετραπλάσια των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, 4, κ.λπ., αρχίζοντας από το 4, τοποθετηθούν σε τάξη και συγκριθούν με τους αριθμούς που αρχίζουν από το 9 και υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 9, διπλασιεπιτέταρτοι λόγοι θα παραχθούν, καθώς είναι φανερό από τον ακόλουθο πίνακα:

4	8	12	16	20	24
9	18	27	36	45	54

Αλλά το είδος του αριθμού που είναι τριπλασιεφήμισυς παράγεται όταν άρτιοι αριθμοί, ξεκινώντας από το 2, τοποθετηθούν σε τάξη και συγκριθούν με μια ακολουθία αριθμών, που αρχίζουν από το 7 και υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 7, όπως παρακάτω:

2	4	6	8	10	12	14
7	14	21	28	35	42	49

Και εάν οι τριπλάσιοι των φυσικών αριθμών αρχίζοντας από το 3 συγκριθούν με μια ακολουθία αριθμών που αρχίζει από το 10 και της οποίας οι αριθμοί υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 10, θα παραχθεί το είδος του τριπλασιεπίτριτου όπως ακολούθως:

3	6	9	12	15	18	21
10	20	30	40	50	60	70

Κατευθύνοντας όμως την προσοχή μας στον πυθαγόρειο πίνακα του κεφαλαίου XIX, μπορούμε να αντιληφθούμε παραδείγματα όλων αυτών των ειδών. Διότι όλες οι σειρές μετά την πρώτη θα παράγουν -όταν συγκριθούν με την πρώτη - όλα τα είδη του πολλαπλάσιου λόγου. Οι αριθμοί της τρίτης σειράς, συγκρινόμενοι με εκείνους της δεύτερης, θα εμφανίσουν ένα είδος επιμόριου λόγου. Εκείνοι της πέμπτης σειράς, συγκρινόμενοι με εκείνους της τρίτης, παρουσιάζουν ένα είδος επιμέρους λόγου. Αλλά πολλαπλασιεπιμόριος λόγος θα παραχθεί όταν εκείνοι της πέμπτης σειράς, ή εκείνοι της έβδομης, ή της ένατης συγκριθούν με εκείνους της δεύτερης. Και με τον τρόπο αυτό, αν ο πίνακας επεκταθεί επ' άπειρον, άπειρα είδη της αναλογίας αυτής θα παραχθούν. Είναι επίσης φανερό ότι οι ακόλουθοι αυτών των λόγων εκφράζονται πάντοτε με την πρόθεση *υπό*· όπως, για παράδειγμα, διπλάσιος υφημιόλιος, διπλάσιος υπεπίτριτος, διπλάσιος υπεπιτέταρτος και με τον ίδιο τρόπο όλοι οι υπόλοιποι.

Πολλαπλάσιος επιμερής λόγος σχηματίζεται όταν ένας αριθμός, συγκρινόμενος με έναν άλλο, περιέχει ολόκληρο τον αριθμό περισσότερο από μια φορά, και δύο, τρία ή οσαδήποτε άλλα μέρη αυτού, σύμφωνα με το είδος του επιμέρους αριθμού. Εδώ επίσης, εξαιτίας αυτού που αναφέρθηκε προηγουμένως, δε θα υπάρξουν δύο μισά, ούτε δύο τέταρτα, ούτε δύο έκτα· αντιθέτως θα υπάρξουν δύο τρίτα, δύο πέμπτα, ή δύο έβδομα. Ούτε θα είναι δύσκολο, σύμφωνα με τα παραδείγματα που παρατέθηκαν προηγουμένως, να ανακαλύψουμε αυτούς τους αριθμούς. Αυτοί ονομάζονται ανάλογα με τα μέρη τους, διπλασιεπιδιμερής, διπλασιεπιτριμερής, διπλασιεπιτετραμερής και ούτω καθεξής. Και πάλι, ονομάζονται τρι-

πλασιεπιδιμερής, τριπλασιεπιτριμερής, τριπλασιεπιτετραμερής και ομοίως. Έτσι το 8, συγκρινόμενο με το 3, παράγει ένα διπλασιεπιδιμερή λόγο. Το ίδιο συμβαίνει όταν το 16 συγκριθεί με το 6, καθώς και με όλους εκείνους τους αριθμούς που αρχίζοντας από το 8 και υπερβαίνοντας ο ένας τον άλλο κατά 8, συγκριθούν με εκείνους που αρχίζουν από το 3 και υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 3. Ομοίως, θα είναι εύκολο να βρεθούν άλλα μέρη αυτών των αριθμών, σύμφωνα με τη μέθοδο που αναφέρθηκε προηγουμένως. Και εδώ, επίσης, οι μικρότεροι αριθμοί χαρακτηρίζονται με την πρόθεση *υπό,* όπως υποδιπλασιεπιδιμερής, υποδιπλασιεπιτριμερής και με παρόμοιο τρόπο οι υπόλοιποι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXII

Μια απόδειξη ότι κάθε ανισότητα προέρχεται από ισότητα.

Απομένει πλέον να παραθέσουμε κάποιον ιδιαίτερα ενδιαφέροντα κανόνα, ο οποίος αναφέρεται σε όλη τη δύναμη της φύσης και την πληρότητα των πραγμάτων. Είναι μεγάλο πλεονέκτημα στην επιστήμη αυτή να μην αγνοείται ότι η φύση του αγαθού είναι ορισμένη, ενώ εκείνη του κακού είναι αόριστη. Όσο περισσότερο αόριστη είναι η φύση του κακού, τόσο χειρότερο είναι αυτό. Μονάχα το αγαθό είναι αυτό που εντυπούμενο ορίζει και δίνει συνοχή σε εκείνο που είναι από μόνο του αόριστο. Συνεπώς στην ανθρώπινη ψυχή υπάρχει κάποιο ίχνος από το θεϊκό αγαθό, το οποίο μετριάζει την ανισότητα των κινήσεων της. Αυτό το ίχνος είναι η λογική δύναμη, με την οποία περιορίζουμε τις άμετρες τάσεις της επιθυμίας και τον αναβρασμό του θυμού, που και τα δύο συμμετέχουν στη φύση της ανισότητας. Τούτο όμως θα γίνει φανερό, αν αποδείξουμε ότι όλα τα είδη ανισότητας παράγονται από την ισότητα, με τέτοιο τρόπο ώστε αποκτώντας σχεδόν τη δύναμη μιας μητέρας και μιας ρίζας, αυτή η

ισότητα εκδηλώνει με προαιώνια αφθονία όλα τα είδη και τις τάξεις της ανισότητας. Ας πάρουμε λοιπόν τρεις ίσους όρους, δηλαδή τρεις μονάδες, ή τρία δυάρια, ή τρία τριάρια, ή τρία τεσσάρια, ή τρία από οποιονδήποτε άλλο αριθμό. Διότι αυτό που συμβαίνει σε κάποια τριάδα όρων, θα ισχύει και στις υπόλοιπες. Για αυτό, από τους τρεις κανόνες που πρόκειται να δοθούν, θα φανεί ότι αρχικώς θα παραχθούν πολλαπλάσια: πρώτα διπλάσιοι, μετά τριπλάσιοι, κατόπιν τετραπλάσιοι, και ούτω καθεξής. Και πάλι, αν τα πολλαπλάσια αντιστραφούν, από αυτά θα προκύψουν επιμόριοι. Πράγματι από τους διπλάσιους θα προκύψουν ημιόλοι, από τους τριπλάσιους επίτριτοι, από τους τετραπλάσιους επιτέταρτοι και οι υπόλοιποι κατά τον ίδιο τρόπο. Αλλά από την αντιστροφή των επιμόριων αναπόφευκτα θα παραχθούν επιμερείς λόγοι. Έτσι ώστε ο επιδιμερής θα γεννάται από τον ημιόλιο, ο επιτριμερής από τον επίτριτο και ο επιτετραμερής από τον επιτέταρτο. Από τους προηγούμενους επιμόριους όμως, παραμένοντας σε μια ευθεία θέση και όχι ανεστραμμένη, θα προκύψουν πολλαπλασιεπιμόριοι, ενώ πολλαπλασιεπιμερείς θα παραχθούν από τη θέση των προηγούμενων επιμερών, εάν παραμένουν αμετάβλητοι.

Οι τρεις κανόνες είναι οι ακόλουθοι. Ο πρώτος αριθμός πρέπει να ισούται με τον πρώτο, αλλά ο δεύτερος να ισούται με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου· και ο τρίτος με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου, και του τρίτου. Όταν λοιπόν γίνει αυτό σε ίσους όρους, οι αριθμοί που παράγονται από αυτούς θα είναι διπλάσιοι. Και αν το ίδιο πράγμα γίνει με αυτούς τους διπλάσιους, τριπλάσιοι αριθμοί θα παραχθούν. Από τους τριπλάσιους θα προκύψουν τετραπλάσιοι αριθμοί. Και έτσι *επ' άπειρον* θα αποκαλύπτονται όλες οι πολλαπλάσιες μορφές του αριθμού. Ας πάρουμε λοιπόν τρεις ίσους όρους, δηλαδή τους 1, 1, 1. Στη δεύτερη σειρά ας θέσουμε τον πρώτο ίσο με τον πρώτο, δηλαδή το 1. Ο δεύτερος θα ισούται με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή το 2. Και ο τρίτος θα είναι ίσος με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτε-

ρου, και του τρίτου, δηλαδή με το 4. Και η τάξη των όρων θα δημιουργήσει μια διπλ,άσια αναλογία, όπως παρακάτω:

1	1	1
1	2	4

Ας κάνουμε τώρα το ίδιο πράγμα με τους διπλάσιους α-ριθμούς. Και ας είναι ο πρώτος ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 1. Και ο δεύτερος ίσος με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή με το 1 και το 2, που κάνουν 3. Και ο τρίτος ίσος με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου και του τρίτου, δηλαδή με το 9. Τότε θα εμφανιστεί αυτός ο τύπος:

1	2	4
1	3	9

Δηλαδή οι όροι που παράγονται θα είναι σε μια αναλογία τρία προς ένα. Ακόμη παραπέρα, αν το ίδιο πράγμα γίνει με τους τριπλάσιους αριθμούς, αμέσως θα παραχθούν τετραπλάσιοι όροι. Δηλαδή, ας είναι ο πρώτος ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 1. Ας είναι ο δεύτερος ίσος με το άθροισμα πρώτου και δεύτερου, δηλαδή με το 4. Και ας είναι ο τρίτος ίσος με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου και του τρίτου, δηλαδή με το 16, όπως παρακάτω:

1	3	9
1	4	16

Για τους υπόλοιπους αυτοί οι τρεις κανόνες πρέπει να χρησιμοποιηθούν σύμφωνα με τούτο τον τύπο.

Αν όμως, τα πολλαπλάσια που παράγονται από τους ί-σους όρους, τοποθετηθούν σε μια αντίστροφη τάξη, και οι ίδιοι κανόνες εφαρμοστούν, θα παραχθεί ημιόλιος λόγος α-πό τους διπλάσιους όρους· επίτριτος από τους τριπλάσιους· επιτέταρτος από τους τετραπλάσιους, κ.λπ. Για παράδειγμα, ας πάρουμε τρεις διπλάσιους όρους που παράγονται από ί-σους και ας τοποθετήσουμε τον τελευταίο πρώτο, δηλαδή:

4 2 1

Ας κάνουμε λοιπόν τον πρώτο να είναι ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 4, το δεύτερο να είναι ίσος με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή με το 6. Και τον τρίτο

να είναι ίσος με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου και του τρίτου, δηλαδή με το 9.

4 2 1
4 6 9

Είναι φανερό ότι παράγεται ημιόλιος λόγος από τους διπλάσιους όρους (σ.τ.μ. δηλαδή $\frac{9}{6}$, $\frac{6}{4}$).

Εκ νέου, ας τοποθετήσουμε τους προηγουμένους τριπλάσιους όρους σε μια αντίστροφη τάξη, δηλαδή 9, 3, 1. Ας είναι λοιπόν ο πρώτος ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 9. Και ο δεύτερος να είναι ίσος με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή με το 12. Και ας ισούται ο τρίτος με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου και του τρίτου, δηλαδή με το 16.

9 3 1
9 12 16

Κατ' αυτόν τον τρόπο παράγεται το δεύτερο είδος επιμόριου αριθμού, δηλαδή ο επίτριτος.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και με τους τετραπλάσιους αριθμούς, ο επιτέταρτος λόγος θα παραχθεί αμέσως, όπως είναι φανερό από την παρακάτω περιγραφή:

16 4 1
16 20 25

Και αν το ίδιο πράγμα γίνει με όλα τα μέρη πολλαπλασιαζόμενα *επ' άπειρον,* η τάξη της επιμοριότητας θα παρουσιαστεί αντιστοίχως.

Επιπλέον, εάν οι επιμόριοι που σχηματίστηκαν από αντιστροφή, αντιστραφούν οι ίδιοι σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες, θα παραχθούν αμέσως επιμερείς λόγοι. Πραγματικά, από τον ημιόλιο θα παραχθεί ο επιδιμερής και από τον επίτριτο ο επιτριμερής λόγος. Οι υπόλοιποι επίσης θα παραχθούν σύμφωνα με το συνηθισμένο είδος ονομασίας, χωρίς κανένα νεωτερισμό στην τάξη. Ας τοποθετήσουμε λοιπόν τους επιμόριους ως εξής:

9 6 4

Ας είναι λοιπόν ο πρώτος ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 9. Και ο δεύτερος ίσος με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή με το 15. Και ο τρίτος ίσος με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου και του τρίτου:

9	6	4
9	15	25

Είναι φανερό ότι παράγεται επιδιμερής λόγος.

Αλλά, αν με τον ίδιο τρόπο αλλάξει ο επίτριτος λόγος, θα εμφανιστεί ο επιμερής. Ας αντιστρέψουμε λοιπόν τους επίτριτους όρους:

16 12 9

Ας είναι λοιπόν ο πρώτος ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 16. Και ο δεύτερος ίσος με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή με το 28. Και ο τρίτος, με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου και του τρίτου, δηλαδή με το 49. Και ο λόγος, όπως είναι φανερό, θα είναι επιτριμερής.

16	12	9
16	28	49

Και πάλι, αντιστρέφοντας με τον ίδιο τρόπο τον επιτέταρτο, η επιτετραμερής αναλογία θα γεννηθεί αμέσως, όπως είναι φανερό από την παρακάτω διάταξη:

25	20	16
25	45	81

Τώρα απομένει να δείξουμε ότι από επιμόριους και επιμερείς παράγονται πολλαπλασιεπιμόριοι και πολλαπλασιεπιμερείς λόγοι. Για αυτό όμως, θα κάνουμε μονάχα δυο περιγραφές. Διότι από τον ημιόλιο σε μια ευθεία και χωρίς αντιστροφή αναλογία θα παραχθεί διπλασιεπιμόριος λόγος. Διατάσσουμε τους ημιόλιους όρους:

4 6 9

Σύμφωνα με τον προηγούμενο τρόπο, ο πρώτος είναι ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 4, ο δεύτερος ίσος με το άθροισμα του πρώτου και του δεύτερου, δηλαδή με to 10. Και ο τρίτος, θα ισούται με το άθροισμα του πρώτου, του διπλάσιου του δεύτερου και του τρίτου, δηλαδή με το 25:

4	6	9
4	10	25

Βλέπουμε ότι παράγονται διπλασιεφημίσεις λόγοι.

Από τον επίτριτο λόγο, με τους όρους μη ανεστραμμένους, θα παραχθεί ο διπλασιεπίτριτος, όπως φαίνεται από την παρακάτω διάταξη:

9	12	16
9	21	49

Αν όμως εστιάσουμε την προσοχή μας στους επιμόριους λόγους και τοποθετήσουμε τους όρους αυτών σύμφωνα με τους προηγούμενους κανόνες, θα βρούμε να παράγονται πολλαπλασιεπιμερείς σε μια τακτική ακολουθία. Διότι προχωρώντας σύμφωνα με τους κανόνες στον τύπο αυτό του επιμέρους, δηλαδή 9, 15, 25, θα παραχθούν οι διπλασιεπιδιμερείς λόγοι 9, 24, 64. Και από τους επιτριμερείς λόγους 16, 28, 49, οι διπλασιεπιτριμερείς θα παραχθούν, δηλαδή 16, 44, 121. Με αυτόν τον τρόπο πολλαπλασιεπιμόριοι ή πολλαπλασιεπιμερείς λόγοι προκύπτουν από επιμόριους ή επιμερείς λόγους. Είναι λοιπόν φανερό ότι η ισότητα είναι η αρχή όλων των ανισοτήτων, αφού όλα τα άνισα γεννιούνται από αυτήν.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Δια πασών (χορδών) συμφωνία=η αρμονία των τόνων πρώτου και τελευταίου της κλίμακας. Δια τεσσάρων (χορδών) συμφωνία=η αρμονία των τόνων πρώτου και τέταρτου της κλίμακας. Δια πέντε (χορδών) συμφωνία=η αρμονία των τόνων πρώτου και πέμπτου της κλίμακας.
2. Βλέπε Ιάμβλιχο στο *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής,* σελ. 11.
3. Αυτός είναι ο ορισμός του Ευκλείδη για τη μονάδα στο 7ο βιβλίο των *Στοιχείων* του.
4. Βλέπε Θέωνα Σμυρναίου, *Των κατά το Μαθηματικόν Χρησίμων εις την Πλάτωνος Ανάγνωσιν,* σελ. 23.
5. Ο Αρχύτας και ο Φιλόλαος, καθώς πληροφορούμαστε από το Θέωνα, αποκαλούσαν άνευ διάκρισης, το *ένα* μονάδα, και τη μονάδα *ένα.* Σύμφωνα όμως με τους άριστους των Πλατωνιστών, Πρόκλο, Δαμάσκιο, κ.α, στις θείες φύσεις η *μονάδα* είναι εκείνη που περιέχει το *διαχωρισμένο* και ταυτόχρονα το *εκ βαθέων ενωμένο* πλήθος· ενώ το *ένα* είναι η κορυφή των *πολλών,* έτσι ώστε το *ένα* είναι απλούστερο από τη μονάδα. Παρατηρήστε επίσης ότι στο αισθητό σύμπαν η πρώτη μονάδα είναι ο ίδιος ο κόσμος, που εμπεριέχει όλο το πλήθος του οποίου είναι η αιτία (σε σύμπραξη με την αιτία των πάντων). Η δεύτερη μονάδα είναι η αψεγάδιαστη σφαίρα. Κατά τρίτον ακολουθούν οι σφαίρες των πλανητών, που καθεμία τους είναι επίσης μια μονάδα, συμπεριλαμβάνοντας ένα κατάλληλο πλήθος. Και κατά τέταρτον και τελευταίο, είναι όλες οι σφαίρες των στοιχείων, που είναι κατά έναν όμοιο τρόπο μονάδες. Ομοίως, όλες αυτές οι μονάδες ονομάζονται *ολότητες* και έχουν αιώνια ύπαρξη.

6. Απεικονίζοντας τη διαίρεση ως εξής:

 1| 2| 3| 4| 5|

καταλαβαίνουμε πως η γραμμή ως διάστημα χωρίζεται στα διάφορα μέρη της και μπορεί όντως να παρατηρήσει κανείς ότι το μέγεθος των διαστημάτων ελαττώνεται, όταν αυξάνεται η ποσότητα τους (Σ.τ.μ.).

7. Η διασαφήνιση των όρων γίνεται από τον ίδιο το συγγραφέα στις σημειώσεις που παραθέτει στο τέλος του βιβλίου (Σ.τ.μ.).
8. Και αν διαιρεθεί σε 6 και 4, καθένα από τα μέρη της διαίρεσης είναι άρτιο.
9. Ημιόλιος: είναι αυτός που περιέχει το όλο και το μισό αυτού. Ο λόγος 3/2 είναι ημιόλιος γιατί ισούται με 1+½. Επίτριτος: αυτός που περιέχει το όλο και το ένα τρίτο αυτού. Ο λόγος 4/3 είναι επίτριτος γιατί ισούται με 1+1/3. Επιτέταρτος: αυτός που περιέχει το όλο και το ένα τέταρτο αυτού. Ο λόγος 5/4 είναι επιτέταρτος γιατί ισούται με 1+1/4. Και ούτω καθεξής.

   Χρησιμοποιήθηκαν τα λήμματα του λεξικού H. Lidell-R. Scott. Αναλυτικότερα παρουσιάζονται σε επόμενα κεφάλαια του πρώτου βιβλίου του παρόντος έργου (Σ.τ.μ.).
10. Βλέπε Θέωνα Σμυρναίο, *Των κατά το Μαθηματικόν Χρησίμων εις την Πλάτωνος Ανάγνωσιν,* σελ. 29, κ.λπ.
11. Σκέφτηκα ότι μια παρόμοια ιδιότητα θα μπορούσε να βρεθεί στις ακολουθίες, που οι όροι τους βρίσκονται σε αναλογία τρία προς ένα, τέσσερα προς ένα, πέντε προς ένα, κ.λπ. Ανακάλυψα ότι εάν στην ακολουθία που οι όροι της βρίσκονται σε αναλογία τρία προς ένα, κάθε όρος διπλασιαστεί, το άθροισμα όλων των όρων εκτός του τελευταίου θα ισούται με τον τελευταίο όρο μείον 1. Έτσι, στην ακολουθία 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, κλπ, εάν κάθε όρος διπλασιαστεί, η ακολουθία θα γίνει 2, 6, 18, 54, 162, 486, κ.λπ. Και 2+6 = 8, το οποίο είναι λιγότερο από το 9 κατά 1. Εκ νέου 2 + 6+18 = 26, το οποίο είναι λιγότερο από το 27 κατά 1. Και 2 + 6+18+54=80, το οποίο είναι λιγότερο από το 81 κατά 1. Και ούτω καθεξής και σε άλλα παραδείγματα. Αλλά σε μια ακολουθία που οι όροι της βρίσκονται σε αναλογία τέσσερα προς ένα, κάθε όρος πρέπει να τριπλασιαστεί. Σε μια αναλογία πέντε προς ένα, οι όροι πρέπει να τετραπλασια-

στούν σε μια αναλογία έξι προς ένα, να πενταπλασιασθούν. Η ίδια ιδιότητα θα ισχύει πάντα.

12. Είναι φανερό ότι καθένας από τους όρους στην αναλογία δύο προς ένα είναι ελαττούμενος ή ελλιπής, γιατί το άθροισμα των μερών του είναι μικρότερο από το σύνολο. Και από όσα έχουμε δείξει, αυτό είναι φανερό *a fortiori* στις ακολουθίες τρία προς ένα, τέσσερα προς ένα, κ.λπ.

13. Στον αρτιάκις άρτιο αριθμό μονάχα το ελάχιστο μέρος, δηλαδή η μονάδα, δεν επιδέχεται διαίρεση· αντιθέτως, στον αρτιοπέρισσο αριθμό μονάχα ο μεγαλύτερος άκρος δέχεται διαίρεση, δηλαδή ο αριθμός ολόκληρος. Έτσι, το 10 μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη, αλλά σε αυτά τα μέρη η διαίρεση σταματά. Αρα στον αριθμό αυτό η διαίρεση σταματά στο μεγαλύτερο μέρος, ενώ, αντιθέτως, στον αρτιάκις άρτιο αριθμό σταματά στο ελάχιστο μέρος, τη μονάδα.

14. Δηλαδή από μονάδες που όταν προστεθούν, σχηματίζουν έναν αριθμό και αυτός ο αριθμός πολλαπλασιάζεται με τη μονάδα.

15. Ο Βοήθιος ισχυρίζεται ότι οι τέλειοι αριθμοί λήγουν πάντα εναλλάξ σε 6 και σε 8. Αυτό όμως ισχύει μόνο για τους πρώτους τέσσερις και όχι για τους υπόλοιπους.

16. Θεωρήσαμε καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους όρους που χρησιμοποιεί ο Ιάμβλιχος στο έργο του *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής εισαγωγής.* Πολλαπλασιότητα=το αφηρημένο ουσιαστικό του πολλαπλάσιος (Από το λεξικό H. Lidell, R. Scott) (Σ.τ.μ.).

17. Με τον όρο εκ φύσεως τριπλάσιοι αριθμοί, θα πρέπει να εννοηθούν οι τριπλάσιοι της φυσικής ακολουθίας 1, 2, 3, 4, 5 κ.λπ. Ομοίως οι εκ φύσεως διπλάσιοι, τετραπλάσιοι κ.λπ., είναι οι διπλάσιοι, τετραπλάσιοι κ.λπ. αυτής της ακολουθίας.

ΒΙΒΛΙΟ ΔΥΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πώς μπορεί η ανισότητα να αναχθεί σε ισότητα.

Σ*το* προηγούμενο βιβλίο δείξαμε πώς όλη η ουσία της ανισότητας προέρχεται από την ισότητα, που είναι η αρχή της φύσης της. Όλα τα πράγματα συντίθενται κυρίως από τα επονομαζόμενα στοιχεία και με την ανάλυση ανάγονται σε αυτά. Έτσι, επειδή τα γράμματα είναι τα στοιχεία του λόγου, ο συνδυασμός των συλλαβών προέρχεται από αυτά και καταλήγει σε αυτά, σαν να ενώνονται τα άκρα. Ο ήχος επίσης κατέχει την ίδια δύναμη στη μουσική. Και ο καθένας γνωρίζει ότι τέσσερα στοιχειώδη σώματα συγκροτούν τον κόσμο. Αλλά μια έσχατη ανάλυση πραγματοποιείται και πάλι στα τέσσερα αυτά στοιχεία. Επειδή λοιπόν παρατηρούμε ότι όλα τα είδη της ανισότητας προέρχονται από την ενοποιητική φύση της ισότητας, είναι απαραίτητο η ανισότητα να αναχθεί και πάλι από εμάς σε ισότητα, δηλαδή σε κάποιο στοιχείο του κατάλληλου είδους της. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρησιμοποίηση τριών κανόνων, η τέχνη δε της ανάλυσης είναι η ακόλουθη. Παίρνουμε τρεις όρους που είναι άνισοι, αλλά αναλογικά συντεταγμένοι, δηλαδή ο μέσος να έχει τον ίδιο λόγο προς το πρώτο όρο με εκείνον που έχει ο τελευταίος όρος προς το μέσο. Σε κάθε λόγο ανισότητας, είτε σε πολλαπλάσιους, είτε σε επιμόριους, είτε σε επιμερείς, είτε στους παραγόμενους από αυτούς, δηλαδή σε πολλαπλασιεπιμόριους, ή πολλαπλασιεπιμερείς, η ίδια αναμφισβήτητη μέθοδος πρέπει να ακολουθηθεί. Δεδομένων λοιπόν αυτών των

τριών όρων, ο πρώτος όρος πρέπει να τοποθετηθεί ως πρώτος. Ο δεύτερος όρος πρέπει να είναι το υπόλοιπο της αφαίρεση του πρώτου από το μέσο όρο. Και ο τρίτος όρος πρέπει να βρεθεί ως εξής: αφαιρούμε τον πρώτο όρο από τον τρίτο και από το υπόλοιπο τους αφαιρούμε το διπλάσιο του ήδη προσδιορισθέντος δεύτερου όρου· το υπόλοιπο θα είναι ο τρίτος όρος. Με τη διαδικασία αυτή η αναλογία θα ελαττωθεί. Έτσι, αν η αρχική αναλογία είναι τέσσερα προς ένα, θα ελαττωθεί σε τρία προς ένα, μετά σε δύο προς ένα και τελικά θα αναχθεί σε ισότητα. Αποδεικνύοντας ότι τούτο ισχύει σε κάθε πολλαπλάσια αναλογία, θα είναι εύκολο να εφαρμοστεί το ίδιο και στα άλλα είδη ανισότητας.

Ας πάρουμε λοιπόν τρεις όρους που συνδέονται με την αναλογία τέσσερα προς ένα, δηλαδή 8, 32, 128. Από το μέσο όρο, το 32, αφαιρούμε τον πρώτο όρο 8. Το υπόλοιπο είναι το 24. Τοποθετούμε επομένως το 8 ως πρώτο και το 24 ως δεύτερο όρο. Από τον τρίτο όρο 128, αφαιρούμε τον πρώτο όρο 8, καθώς και διπλασιασμένο το δεύτερο, δηλαδή δυο φορές το 24, οπότε έχουμε υπόλοιπο 72. Συνεπώς οι τρεις όροι θα είναι 8, 24, 72 και η αναλογία τέσσερα προς ένα θα έχει αναχθεί σε τρία προς ένα.

Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο σε αυτούς τους τρεις όρους, η αναλογία τρία προς ένα θα αναχθεί σε δύο προς ένα. Δηλαδή, ο πρώτος θα είναι ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 8. Από το δεύτερο αφαιρούμε τον πρώτο και απομένει το 16. Και από τον τρίτο 72, αφαιρούμε τον πρώτο, δηλαδή to 8, και δυο φορές τον εναπομείναντα δεύτερο, δηλαδή το 16 χ 32, οπότε απομένει το 32. Οι τρεις όροι θα είναι τώρα 8, 16, 32· και η κατάσταση θα έχει ελαττωθεί σε μια αναλογία δύο προς ένα.

Με την ίδια πορεία όμως, αυτοί οι όροι θα ελαττωθούν ως την ισότητα. Γιατί ο πρώτος θα είναι ίσος με τον πρώτο, δηλαδή με το 8. Από το 16 αφαιρούμε 8 και απομένει το 8. Και από τον τρίτο όρο 32, αφαιρούμε το πρώτο 8, και δυο φορές τον εναπομείναντα δεύτερο, δηλαδή δυο φορές το 8, οπότε θα απομείνει το 8. Επομένως, οι τρεις όροι θα γίνουν με αναγωγή 8, 8, 8.

Τα άλλα είδη ανισότητας επίσης με την ίδια διαδικασία θα αναχθούν σε ισότητα. Συνεπώς μπορεί αναμφίβολα να υποτεθεί ότι όπως η μονάδα είναι η αρχή και το στοιχείο της ποσότητας που υπάρχει από μόνη της, έτσι η ισότητα είναι η μητέρα της σχετικής ποσότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

Σχετικά με την εύρεση των αριθμών της ίδιας αναλογίας που προηγούνται σε κάθε αριθμό· περιγραφή αυτών και έκθεση της περιγραφής.

Υπάρχει όμως κάποιο βαθυστόχαστο και θαυμαστό θεώρημα, *εννοιόφατον θεώρημα,* όπως λέει ο Νικόμαχος, *ένα θεώρημα πλήρους διανοητικής σύλληψης,* χρήσιμο για την κατανόηση της πλατωνικής γένεσης της ψυχής στον *Τίμαιο* και των διαστημάτων της αρμονικής ευταξίας. Διότι στον *Τίμαιο* καλούμαστε να παράγουμε και να επεκτείνουμε τρεις ή τέσσερις ημιόλιους, κάποιους επίτριτους λόγους και επιτέταρτες συγκρίσεις[1]. Προκειμένου όμως να μην υποβαλλόμαστε στο μεγαλύτερο κόπο χωρίς κανένα όφελος, είναι τώρα αναγκαίο να ερευνήσουμε πόσους επιμόριους έχει κάθε πολλαπλάσιο για ακόλουθούς του. Διότι όλα τα πολλαπλάσια θα είναι οι ηγέτες σε τόσες όμοιες αναλογίες, όσον αυτά τα ίδια απέχουν από τη μονάδα. Όμοιες αναλογίες είναι εκείνες που έχουν τον ίδιο σταθερό λόγο και ονομασία. Το νόημα ωστόσο των πολλαπλάσιων που είναι ηγέτες όμοιων αναλογιών είναι το ακόλουθο: το διπλάσιο, όπως έχουμε παρατηρήσει, παράγει πάντοτε ημιόλιους λόγους, το τριπλάσιο είναι ο ηγέτης των επίτριτων, ενώ το τετραπλάσιο των επιτέταρτων λόγων.

Το πρώτο διπλάσιο, επομένως, θα έχει μόνο έναν ημιόλιο, το δεύτερο θα έχει δύο, το τρίτο τρεις, το τέταρτο τέσσερις και σύμφωνα με αυτή την τάξη θα υπάρχει η ίδια πρόοδος *επ' άπειρον.* Είναι δηλαδή αδύνατον η θέση που

έχει το πολλαπλάσιο ως προς τη μονάδα να υπερβαίνει ή να υπολείπεται του αριθμού των σχηματιζόμενων αναλογιών. Το πρώτο διπλάσιο, επομένως, είναι ο δυαδικός αριθμός, δηλαδή το 2, το οποίο δέχεται μόνο έναν ημιόλιο, δηλαδή το 3. Διότι το 2 όταν συγκριθεί με το 3, παράγει έναν ημιόλιο λόγο. Ο αριθμός 3, όμως, επειδή δεν έχει μισό, δεν μπορεί να συγκριθεί με κανένα άλλο αριθμό σε έναν ημιόλιο λόγο. Αλλά το 4 είναι ο δεύτερος διπλάσιος. Αυτός επομένως είναι ο ηγέτης δύο ημιόλιων αριθμών. Διότι το 6 συγκρινόμενο με αυτόν είναι ημιόλιος· και στο 6, επειδή αυτό έχει μισό, το 9 είναι ημιόλιος. Άρα, υπάρχουν δύο ημιόλιοι, δηλαδή στο 4 το 6 και στο 6 το 9. Αλλά το 9, επειδή δεν έχει μισό, αποκλείεται από αυτή τη σύγκριση. Ο τρίτος διπλάσιος είναι το 8. Αυτός επομένως είναι ο ηγέτης τριών ημιόλιων. Διότι ο αριθμός 12 συγκρίνεται με τούτον σε αυτό το λόγο, με το 12 ο 18 και με τον 18 ο 27. Αλλά ο 27 δεν έχει μισό. Το ίδιο πράγμα θα συμβεί αναγκαστικά και σε άλλους αριθμούς, όπως γίνεται φανερό στον ακόλουθο πίνακα:

1	2	3	8	16	32
	3	6	12	24	48
		9	18	36	72
			27	54	105
				81	162
					243

Συμβαίνει δε πάντοτε, λόγω μιας θεϊκής και όχι ανθρώπινης τάξης, ο τελευταίος ημιόλιος αριθμός να απέχει από τον ηγέτη του τόσο όσο ο ηγέτης του από τη μονάδα. Έτσι το 9 είναι ο δεύτερος ημιόλιος από το 4 και το 4 είναι ο δεύτερος διπλάσιος από το 1. Επίσης, το 27 είναι ο τρίτος ημιόλιος από το 8 και το 8 είναι ο τρίτος διπλάσιος από το 1. Το ίδιο και οι υπόλοιποι. Επίσης, ο τελευταίος ημιόλιος είναι πάντοτε αδύνατο να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη.

Το ίδιο πράγμα επίσης συμβαίνει στους τριπλάσιους αριθμούς, διότι από αυτούς γεννιούνται οι επίτριτοι. Έτσι, επειδή το 3 είναι ο πρώτος τριπλάσιος αριθμός, έχει έναν ε-

πίτριτο, το 4, ο οποίος, επειδή δεν έχει ένα τρίτο μέρος, στερείται ενός επίτριτου αριθμού. Αλλά ο δεύτερος τριπλάσιος αριθμός, το 9, έχει για επίτριτο τον αριθμό 12. Και το 12, επειδή έχει ένα τρίτο μέρος, έχει επίτριτο το 16, το οποίο στερείται ενός τρίτου μέρους. Ο αριθμός 27 όμως, επειδή είναι ο τρίτος τριπλάσιος, έχει για επίτριτο το 36, το οποίο συγκρίνεται με το 48 στην ίδια αναλογία και το 48 έχει επίσης έναν επίτριτο, το 64· Αλλά το 64 δεν έχει επίτριτο, επειδή δεν έχει τρίτο μέρος. Θα βρεθεί λοιπόν σε όλους τους τριπλάσιους αριθμούς ότι από τον τελευταίο αριθμό στην ίδια αναλογία προηγούνται τόσοι αριθμοί, όσοι προηγούνται του πρώτου από αυτούς από τη μονάδα· και ότι είναι αδύνατον αυτός να χωριστεί σε τρία ίσα μέρη:

1	3	9	27	81	243
	4	12	36	108	324
		16	48	144	432
			64	192	576
				256	768
					1024

Η περιγραφή των τετραπλάσιων αριθμών γίνεται σύμφωνα με το ακόλουθο σχέδιο, το οποίο θα γίνει αμέσως αντιληπτό σε εκείνους που έχουν κατανοήσει όσα έχουν ήδη ειπωθεί. Και το ίδιο πράγμα θα συμβαίνει και σε όλα τα άλλα πολλαπλάσια.

1	4	16	64	256	1024
	5	20	80	320	1280
		25	100	400	1600
			125	500	2000
				625	2500
					3125

Γίνεται επομένως φανερό, με βάση την προηγούμενη απόδειξη, ότι *τα* πολλαπλάσια προηγούνται όλων των επιμόριων, αφού αυτά παράγουν διπλασιεφημίσεις, τριπλασιεπίτριτους κ.λπ.· και ότι όλα τα πολλαπλάσια παράγουν όλους

τους επιμόριους σε μια κανονική ακολουθία. Είναι επίσης αξιοθαύμαστο στους αριθμούς αυτούς ότι όπου, όπως στον πρώτο πίνακα, η πρώτη σειρά αποτελείται από αριθμούς που είναι διπλάσιοι, και οι επόμενες σειρές θα αποτελούνται επίσης από διπλάσιους. Αν εκείνοι της πρώτης σειράς είναι τριπλάσιοι, όπως στο δεύτερο πίνακα, εκείνοι στις επόμενες σειρές θα είναι επίσης τριπλάσιοι. Αν είναι τετραπλάσιοι στην πρώτη σειρά, όπως στον τρίτο πίνακα, εκείνοι στις επόμενες σειρές θα είναι τετραπλάσιοι· και το ίδιο και στα άλλα πολλαπλάσια επ' άπειρον. Ομοίως, όλοι οι γωνιακοί αριθμοί είναι αναγκαστικά πολλαπλάσια. Και πραγματικά από τις διπλάσιες σειρές, οι γωνιακοί αριθμοί θα είναι τριπλάσιοι· και από τις τριπλάσιες, τετραπλάσιοι· από τις τετραπλάσιες, πενταπλάσιοι. Συνεπώς όλα τα πράγματα θα συμφωνούν με τους εαυτούς τους, κατ' αναλογία προς μια απαράλλακτη τάξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Η μέθοδος εύρεσης των επιμόριων διαστημάτων από τα οποία παράγεται το πολλαπλάσιο διάστημα.

Αν, επομένως, ενωθούν τα δύο πρώτα επιμόρια είδη, προκύπτει το πρώτο είδος πολλαπλασιότητας. Γιατί κάθε λόγος δυο προς ένα συντίθεται από τον ημιόλιο και τον επίτριτο· και όλοι οι ημιόλιοι και οι επίτριτοι λόγοι από ένα λόγο δυο προς ένα. Δηλαδή το 3 είναι ημιόλιος του 2 και το 4 είναι επίτριτος του 3· και το 4 είναι το διπλάσιο του 2.

$$\underbrace{2 \qquad\qquad 3}_{\textbf{ημιόλιος}}\!\!\underbrace{\qquad\qquad 4}_{\textbf{επίτριτος}}$$

Άρα, ο ημιόλιος και ο επίτριτος συνθέτουν ένα λόγο δύο προς ένα. Εν συντομία, εάν υπάρχουν δυο αριθμοί, ο ένας εκ των οποίων είναι το διπλάσιο του άλλου, ανάμεσα τους ένας μόνον μέσος μπορεί να βρεθεί, ο οποίος είναι ημιόλιος ως προς το ένα άκρο και επίτριτος ως προς το άλλο. Έτσι αν το 4 τοποθετηθεί ανάμεσα στο 6 και το 3, δηλαδή ανάμεσα σε ένα διπλάσιο και ένα μισό, συγκρινόμενο με το 3 σχηματίζει έναν επίτριτο λόγο, ενώ με το 6 έναν ημιόλιο.

3 4 6

επίτριτος ημιόλιος

Σωστά επομένως λέγεται ότι ο λόγος δυο προς ένα συντίθεται από τον ημιόλιο και τον επίτριτο, και ότι αυτά τα δύο είδη επιμόριου λόγου γεννούν το λόγο δύο προς ένα, δηλαδή το πρώτο είδος του πολλαπλάσιου.

Και πάλι, από το πρώτο είδος του πολλαπλάσιου και από τον πρώτο επιμόριο, δηλαδή τον ημιόλιο, σχηματίζεται το δεύτερο είδος του πολλαπλάσιου, δηλαδή ο τριπλάσιος αριθμός. Διότι το 12 είναι το διπλάσιο του 6 και το 18 είναι επίτριτος στο 12 και το τριπλάσιο του 6.

6 12 18

διπλάσιος ημιόλιος

Εάν, επίσης, ανάμεσα στους ίδιους αριθμούς 6 και 18, τοποθετηθεί το 9 ως μέσο, αυτό θα είναι ημιόλιο ως προς το 6 και υποδιπλάσιο ως προς το 18· και το 18 είναι τριπλάσιο στο 6.

6 9 18

ημιόλιος υποδιπλάσιος

Από το διπλάσιο και τον ημιόλιο επομένως, προκύπτει ο λόγος τρία προς ένα και σε αυτούς ανάγεται πάλι με την ανάλυση. Αλλά αν ο τριπλάσιος αριθμός, που είναι το δεύτερο είδος του πολλαπλάσιου, συνδυαστεί με το δεύτερο είδος του επιμόριου, δηλαδή τον επίτριτο, η μορφή του τετραπλάσιου θα παραχθεί αμέσως και θα διαλυθεί πάλι μέσω ενός φυσικού διαχωρισμού στα ίδια μέρη, σύμφωνα με τον τρόπο που επιδείχθηκε προηγουμένως.

3 9 12

τριπλάσιος επίτριτος

Αλλά από τον τετραπλάσιο και τον επιτέταρτο, θα σχηματιστεί αμέσως ο λόγος πέντε προς ένα.

4 16 20

τετραπλάσιος επιτέταρτος

Και από τον πενταπλάσιο και τον επίπεμπτο, ο λόγος έξι προς ένα θα προκύψει.

5 25 30

πενταπλάσιος επίπεμπτος

Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την πρόοδο, θα παραχθούν όλα τα είδη των πολλαπλάσιων χωρίς καμία αλλαγή της σταθερής τάξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Σχετικά με την ποσότητα που υπάρχει από μόνη της, η οποία μελετάται σε γεωμετρικά σχήματα, κ.λπ.

Έως τώρα παρουσιάσαμε με ικανοποιητική πληρότητα όσα αφορούν τη σχετική ποσότητα. Ακολούθως θα συζητήσουμε κάποιες λεπτομέρειες σχετικά με την ποσότητα που υφίσταται από μόνη της και δεν αναφέρεται σε κάποιο άλλο πράγμα, οι οποίες ίσως βοηθήσουν όταν επανέλθουμε αργότερα στη σχετική ποσότητα. Διότι η θεωρία της μάθησης επιθυμεί κατά κάποιον τρόπο να γνωρίζει την εναλλασσόμενη απόδειξή της. Η παρούσα ενασχόληση μας όμως αφορά τους αριθμούς που υφίστανται σε γεωμετρικά σχήματα, τα διαστήματα και τις διαστάσεις τους, δηλαδή τους γραμμικούς, τριγωνικούς, ή τετράγωνους αριθμούς, καθώς και άλλους που μόνη της η επιφάνεια αποκαλύπτει, όπως επίσης και εκείνους που σχηματίζονται από μια άνιση σύνθεση πλευρών. Θα συζητήσουμε επίσης για τους στερεούς αριθμούς, δηλαδή τέτοιους όπως είναι οι κυβικοί, οι σφαιρικοί και οι πυραμιδικοί, και τέτοιους που σχηματίζουν τα πλινθία, οι δοκίδες και οι σφηνίσκοι, όλους δηλαδή που πραγματικά έχουν σχέση με τη γεωμετρική θεώρηση. Αλλά όπως η επιστήμη της γεωμετρίας παράγεται από την αριθμητική, σαν από κάποια ρίζα και μητέρα, έτσι βρίσκουμε τους σπόρους των σχημάτων της στους πρώτους αριθμούς.

Η μονάδα επομένως, που είναι για την αριθμητική ό,τι είναι το σημείο για τη γεωμετρία, είναι η αρχή του διαστήματος και του μήκους. Από μόνη της βέβαια δεν είναι ικανή ούτε για διάστημα ούτε για μήκος, ακριβώς όπως ένα σημείο είναι η αρχή μιας γραμμής και ενός διαστήματος, αλλά δεν είναι από μόνο του ούτε διάστημα ούτε γραμμή. Διότι ένα σημείο τοποθετημένο πάνω σε ένα άλλο σημείο δεν παράγει κανένα διάστημα. Επίσης ανάμεσα σε ίσα πράγματα δεν παρεμβάλλονται διαστήματα. Αν δηλαδή τρία εξάρια τοποθετηθούν σύμφωνα με αυτό τον τρόπο, 6, 6, 6, τότε όπως είναι το πρώτο προς το δεύτερο, έτσι είναι το δεύτερο με το

τρίτο· και ανάμεσα στο πρώτο και το δεύτερο, ή στο δεύτερο και το τρίτο, τίποτε δεν παρεμβαίνει, διότι κανένα διάστημα χώρου δε διαχωρίζει το 6 από το 6. Ομοίως η μονάδα, πολλαπλασιαζόμενη με τον εαυτό της, δεν παράγει τίποτε άλλο εκτός από τον εαυτό της. Διότι εκείνο που είναι χωρίς διάστημα, δεν κατέχει τη δύναμη να παράγει διάστημα. Αλλά κάθε άλλος αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του παράγει ένα μεγαλύτερο αριθμό, γιατί με τον πολλαπλασιασμό τους τα διαστήματα διαστέλλονται λόγω ενός μεγαλύτερου μήκους. Εκείνο, όμως, που είναι χωρίς διάστημα, δεν έχει τη δύναμη να γεννήσει τίποτε περισσότερο από τον εαυτό του. Από την αρχή αυτή επομένως, δηλαδή από τη μονάδα, προχωρά η πρώτη επέκταση στο μήκος και ξεδιπλώνεται σε όλους τους αριθμούς από τη δυάδα. Διότι το πρώτο διάστημα είναι μια γραμμή, αλλά δύο διαστήματα είναι μήκος και πλάτος, δηλαδή μια επιφάνεια, και τρια διαστήματα είναι μήκος, πλάτος και ύψος, δηλαδή ένα στερεό. Εκτός από αυτά δεν υπάρχουν άλλα διαστήματα, άρα τα έξι είδη της κίνησης υφίστανται σύμφωνα με τις φύσεις και τον αριθμό των διαστημάτων. Διότι ένα διάστημα περιέχει μέσα του δύο κινήσεις. Έτσι στο μήκος υπάρχει το εμπρός και το πίσω, στο πλάτος το δεξί και το αριστερό, στο ύψος το επάνω και το κάτω. Αλλά κατ' ανάγκη κάθε στερεό σώμα πρέπει να έχει μήκος, πλάτος και ύψος· άρα εκείνο που εμπεριέχει αυτές τις τρεις διαστάσεις, θα πρέπει να είναι ένα στερεό. Αφού, επομένως, μια γραμμή υπερβαίνει ένα σημείο κατά μια διάσταση, δηλαδή κατά το μήκος, αλλά μια επιφάνεια το υπερβαίνει κατά δυο διαστάσεις, δηλαδή κατά μήκος και κατά πλάτος, είναι φανερό ότι ένα σημείο δεν έχει κάποιο υλικό μέγεθος ή διάσταση του διαστήματος, και είναι η αρχή όλων των διαστημάτων, όντας από τη φύση του ανίκανο να χωριστεί. Έτσι, ένα σημείο είναι η αρχή της πρώτης διάστασης, όμως δεν είναι το ίδιο διάσταση· είναι η κορυφή μιας γραμμής, αλλά δεν είναι ακόμη γραμμή. Ομοίως μια γραμμή είναι η αρχή μιας επιφάνειας, αλλά δεν είναι η ίδια επιφάνεια· και είναι η αρχή μιας δεύτερης διάστασης, όμως ακόμη δεν περιέχει κανένα ίχνος αυτής. Επίσης, μια επιφάνεια εί-

ναι η αρχή ενός στέρεου, αλλά δεν είναι η ίδια ούτε διευρυμένη από μια τρίτη διάσταση, ούτε στερεοποιημένη από κάποια παχυλότητα.

Κατά τον ίδιο τρόπο στους αριθμούς, η μονάδα πραγματικά δεν είναι από μόνη της ένας γραμμικός αριθμός, όμως είναι η αρχή των αριθμών που εκτείνονται κατά μήκος. Και ο γραμμικός αριθμός στερούμενος ο ίδιος κάθε πλάτους, είναι η αρχή του αριθμού που επεκτείνεται σε πλάτος. Ομοίως ο αριθμός της επιφάνειας στερείται ο ίδιος όγκου, προστιθέμενος όμως στο ύψος είναι η κορυφή ενός αριθμητικού στερεού. Αυτό όμως θα το καταστήσουμε σαφέστερο με παραδείγματα. Ο γραμμικός αριθμός αρχίζει από το 2· και η ακολουθία τέτοιων αριθμών σχηματίζεται με τη συνεχή πρόσθεση της μονάδας, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:

11. 111. 1111. 11111.

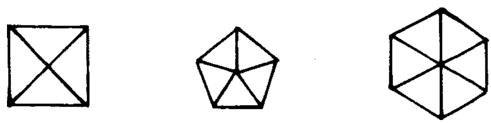
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

Σχετικά με τα επίπεδα, ευθύγραμμα σχήματα. Ότι το τρίγωνο είναι η αρχή τους. Σχετικά με την κατανομή των τριγώνων, των πλευρών τους και τη γένεσή τους.

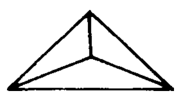
Οπωσδήποτε, μια επίπεδη επιφάνεια βρίσκεται σε αριθμούς που έχουν την αρχή τους στο 3. Με την πρόσθεση του πλάτους οι γωνίες επεκτείνονται σύμφωνα με το πλήθος των αριθμών που ακολουθούν ο ένας τον άλλο σε μια φυσική τάξη. Έτσι, η πρώτη επίπεδη επιφάνεια σε αριθμούς είναι ένα τρίγωνο, η δεύτερη είναι ένα τετράγωνο, η τρίτη ένα πεντάγωνο, η τέταρτη ένα εξάγωνο, η πέμπτη ένα επτάγωνο, η έκτη ένα οκτάγωνο· και οι υπόλοιπες κατά τον ίδιο τρόπο αυξάνουν τις γωνίες τους στην επίπεδη παράσταση των σχημάτων, σύμφωνα με την τάξη των φυσικών αριθμών.

Οι επίπεδες επιφάνειες αρχίζουν από τον αριθμό 3, επειδή μόνο η τριάδα είναι η αρχή του πλάτους και της επιφάνειας. Το ίδιο πράγμα είναι εμφανέστερο στη γεωμετρία.

Διότι δύο ευθείες γραμμές δεν περιέχουν χώρο. Και σε κάθε πολυγωνικό σχήμα, ανεξαρτήτως αν είναι τετράγωνο, πεντάγωνο, ή εξάγωνο, κ.λπ., οι γραμμές που χαράσσονται από το κέντρο αυτού προς τις διάφορες γωνίες, θα το χωρίσουν σε τόσα τρίγωνα, όσες γωνίες έχει το σχήμα. Τούτο γίνεται φανερό στα επόμενα σχήματα:



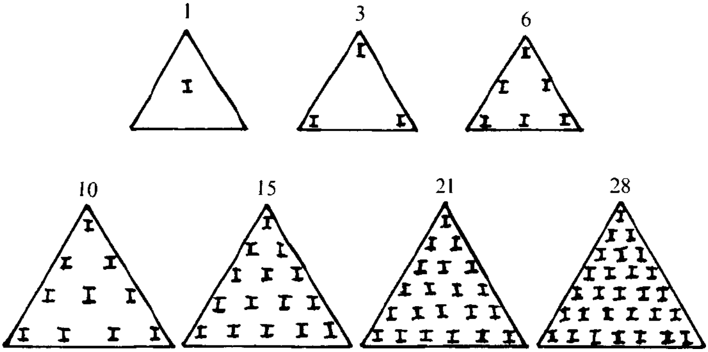
Αν όμως το τριγωνικό σχήμα χωριστεί κατά τον τρόπο αυτό, δε θα αναλυθεί σε τίποτε άλλο πέρα από τον εαυτό του, εφόσον θα διαιρεθεί σε τρία τρίγωνα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Έτσι το σχήμα αυτό είναι η αρχή του πλάτους, ώστε όλες οι άλλες επιφάνειες αναλύονται σε αυτό· επειδή όμως δεν προέρχεται το ίδιο από άλλες αρχές και δε λαμβάνει την αρχή του από κανένα άλλο πλάτος, αναλύεται στον εαυτό του. Όμως, ότι το ίδιο πράγμα συμβαίνει επίσης στους αριθμούς, θα δειχθεί στην πορεία αυτής της πραγματείας.

Ο πρώτος από όλους τους τριγωνικούς αριθμούς επομένως είναι εκείνος που σχηματίζεται από τη μονάδα. Αλλά αυτή είναι πρώτη εν δυνάμει και όχι εν ενεργεία. Γιατί εφόσον είναι η μητέρα όλων των αριθμών, οτιδήποτε βρίσκεται σε εκείνους τους αριθμούς που προέρχονται από αυτήν, πρέπει αναγκαστικά να περιέχεται σε αυτήν μέσω κάποιας φυσικής δύναμης. Αλλά ο πρώτος τριγωνικός αριθμός εν ενεργεία είναι το 3· και αυτό έχει για πλευρά του τη δυαδικότητα ή, όπως ονομάζεται από τους Έλληνες, τη δυάδα. Αλλά

το δεύτερο τρίγωνο εν ενεργεία είναι το 6· και αυτό έχει για πλευρά του την τριάδα. Το τρίτο τρίγωνο είναι το 10, η πλευρά του οποίου είναι το 4. Το τέταρτο είναι το 15, η πλευρά του οποίου είναι το 5· και ούτω καθεξής επ' άπειρον, όπως στα σχήματα που ακολουθούν:



Αυτοί οι τριγωνικοί αριθμοί γεννιούνται από την πρόσθεση της φυσικής ακολουθίας των αριθμών, δηλαδή από την πρόσθεση της ακολουθίας 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, κ.λπ. Αν λάβουμε λοιπόν τη μονάδα, θα είναι το πρώτο τρίγωνο εν δυνάμει. $1+2=3$ θα είναι το δεύτερο τρίγωνο σε τάξη, αλλά το πρώτο εν ενεργεία. $1+2+3=6$ θα είναι το τρίτο τρίγωνο. $1+2+3+4=10$ θα είναι το τέταρτο, και το ίδιο για τα υπόλοιπα. Ομοίως, όσες μονάδες υπάρχουν στον τελευταίο προστιθέμενο αριθμό, τόσες θα περιέχει στην πλευρά του το τρίγωνο που παράγεται. Έτσι, το 3 που είναι το πρώτο τρίγωνο εν ενεργεία, γεννάται προσθέτοντας το 2 στο 1· άρα έχει δύο μονάδες στην πλευρά του. Ομοίως, το 6 που παράγεται από την πρόσθεση στην οποία το 3 είναι ο τελευταίος αριθμός, θα έχει τρεις μονάδες στην πλευρά του. Και το ίδιο θα βρεθεί να συμβαίνει στους υπόλοιπους.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι σε μια συνεχή σειρά από τριγωνικούς αριθμούς, δύο άρτιοι και δύο περιττοί αριθμοί παρουσιάζονται εναλλάξ. Διότι το 1 και το 3 που είναι τα

δύο πρώτα τρίγωνα, είναι περιττοί· αλλά το 6 και το 10, τα δύο επόμενα τρίγωνα, είναι άρτιοι. Και πάλι, το 15 και το 21 είναι περιττοί, αλλά το 28 και το 36 είναι άρτιοι. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους.

Αν ομοίως υπάρχει μια ακολουθία από τριγωνικούς αριθμούς χωρίς τη μονάδα και μια ακολουθία αριθμών σε φυσική τάξη, τα διάφορα τρίγωνα -παίρνοντας τα χωριστά- θα αντιστοιχούν κατ' αναλογία με την αδιάλειπτη φυσική τάξη των αριθμών. Έτσι ώστε ο πρώτος και ο δεύτερος της μιας ακολουθίας θα αντιστοιχούν στον πρώτο και το δεύτερο της άλλης, αλλά ο τρίτος και ο τέταρτος της μιας στο δεύτερο και τον τρίτο της άλλης, ο πέμπτος και ο έκτος της μιας στον τρίτο και τον τέταρτο της άλλης· και ούτω καθεξής. Ας πάρουμε λοιπόν μια ακολουθία αριθμών σε φυσική τάξη, δηλαδή 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Και κάτω από αυτήν, μια ακολουθία από τρίγωνα, δηλαδή, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45. Τότε, όπως είναι το 1 προς το 2, έτσι είναι το 3 προς το 6. Και όπως είναι το 2 προς το 3, έτσι είναι το 10 στο 15. Ομοίως, όπως είναι το 3 προς το 4, έτσι είναι το 21 προς το 28· και το ίδιο για τους υπόλοιπους.

Τριγωνικοί αριθμοί λαμβάνονται επίσης σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο. Αν στη φυσική διάταξη των αριθμών από τη μονάδα παραλειφθεί πρώτα ένας όρος, μετά δύο όροι, μετά τρεις, μετά τέσσερις, και ούτω καθεξής, θα σχηματιστούν τριγωνικοί αριθμοί σε μια συνεχή σειρά:

Η ακολουθία των φυσικών αριθμών	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Η ακολουθία των τριγώνων	1		3			6				10					15						21							28

Εδώ γίνεται φανερό ότι ανάμεσα στο πρώτο και το δεύτερο τρίγωνο στη φυσική διάταξη των αριθμών μεσολαβεί ένας αριθμός, ανάμεσα στο δεύτερο και το τρίτο τρίγωνο δύο αριθμοί, ανάμεσα στο τρίτο και το τέταρτο τρεις· και το ίδιο συμβαίνει και στους υπόλοιπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

Σχετικά με τους τετράγωνους αριθμούς, τις πλευρές τους και τη γένεση τους.

Τετράγωνος αριθμός είναι εκείνος που ο ίδιος πραγματικά αναπτύσσει πλάτος, όχι όμως σε τρεις γωνίες, όπως ο προηγούμενος αριθμός, αλλά σε τέσσερις. Επίσης εκτείνεται σε ίση διάσταση πλευρών. Και τέτοιοι αριθμοί είναι όπως ακολούθως:

			1 1 1 1
		1 1 1	1 1 1 1
	1 1	1 1 1	1 1 1 1
1	1 1	1 1 1	1 1 1 1

Αλλά στους αριθμούς αυτούς οι πλευρές επίσης αυξάνουν σύμφωνα με τη φυσική διάταξη των αριθμών. Γιατί το πρώτο τετράγωνο εν δυνάμει και ικανότητι, δηλαδή η μονάδα, έχει το 1 για πλευρά του. Το δεύτερο τετράγωνο, που είναι το πρώτο εν ενεργεία, δηλαδή το 4, έχει το 2 για πλευρά του. Το τρίτο, που είναι το 9, και είναι το δεύτερο τετράγωνο εν ενεργεία, έχει το 3 για πλευρά του. Κατά τον ίδιο τρόπο προχωρούν όλοι οι υπόλοιποι.

Τέτοιοι αριθμοί παράγονται από την ακολουθία των φυσικών αριθμών, όχι όμως όπως οι τριγωνικοί, αλλά από τη συνεχή παράλειψη ενός αριθμού στην πρόσθεση των όρων μεταξύ τους. Διότι στη φυσική ακολουθία των αριθμών από τη μονάδα, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, κ.λπ., το 1 είναι ο πρώτος εν δυνάμει τετράγωνος. Τότε $1+3=4$, ο δεύτερος τετράγωνος· $1+3+5=9$, ο τρίτος τετράγωνος· $1+3+5+7=16$, ο τέταρτος τετράγωνος. Παραλείποντας συνέχεια έναν όρο και προσθέτοντας τους υπόλοιπους, θα παραχθεί ολόκληρη η ακολουθία των τετράγωνων.

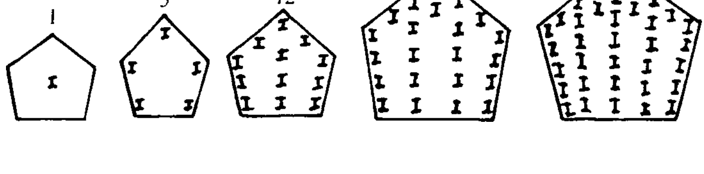
Ομοίως στους αριθμούς αυτούς υπάρχει η λεπτότητα της φύσης και η αναλλοίωτη τάξη, εφόσον κάθε τετράγωνο δια-

τηρεί τόσες μονάδες στην πλευρά του, όσος είναι ο αριθμός των προσθετέων που δίνουν άθροισμα τον τετράγωνο αριθμό. Στο πρώτο τετράγωνο, επειδή αυτό παράγεται από το 1, η πλευρά του είναι το 1. Στο δεύτερο τετράγωνο, δηλαδή το 4, επειδή αυτό παράγεται από το 1 και το 3, που είναι δύο όροι, η πλευρά είναι το 2. Στο 9, επειδή αυτό παράγεται από τρεις αριθμούς, η πλευρά είναι το 3. Και το ίδιο για τους υπόλοιπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

Σχετικά με τους πεντάγωνους, τις πλευρές τους και τη γένεση τους.

Πεντάγωνος είναι ένας αριθμός, ο οποίος εκφραζόμενος με τις μονάδες του, παρουσιάζει τη μορφή ενός πενταγωνικού σχήματος. Έχει δηλαδή πέντε γωνίες και πέντε ίσες πλευρές. Πεντάγωνοι αριθμοί είναι τέτοιοι όπως οι ακόλουθοι, δηλαδή 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70. Οι πλευρές τους επίσης αυξάνουν κατά τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή σε κάθε πεντάγωνο οι μονάδες που σχηματίζουν την πλευρά του είναι τόσες όσες ο αριθμός της τάξης του πεντάγωνου. Έτσι, το 1 που είναι το πρώτο εν δυνάμει πεντάγωνο, έχει το 1 για πλευρά του. Αλλά το 5 που είναι το δεύτερο πεντάγωνο, έχει το 2 για πλευρά του. Το τρίτο πεντάγωνο, που είναι το 12, έχει το 3 για πλευρά του. Το τέταρτο που είναι το 22, έχει το 4. Και ούτω καθεξής, σύμφωνα με την πρόοδο της ακολουθίας των φυσικών αριθμών:



ΟΙ αριθμοί αυτοί, οι οποίοι εκτεινόμενοι σε πλάτος αποκαλύπτουν πέντε γωνίες, παράγονται επίσης από την πρόσθεση της φυσικής ακολουθίας των αριθμών. Δηλαδή αφού δύο συνεχόμενοι όροι παραλειφθούν, ο τελευταίος προστίθεται στον προηγούμενο και σχηματίζονται τα διάφορα πεντάγωνα, όπως παρακάτω:

Η ακολουθία των φυσικών αριθμών, με την παράλειψη δύο όρων	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
Η ακολουθία των πεντάγωνων	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210

Πεντάγωνοι επίσης παράγονται από τετράγωνους και τρίγωνους κατά τον ακόλουθο τρόπο. Ο δεύτερος τετράγωνος, όταν προστεθεί στον πρώτο τρίγωνο, θα παράγει το δεύτερο πεντάγωνο. Ο τρίτος τετράγωνος, όταν προστεθεί στο δεύτερο τρίγωνο, θα παράγει τον τέταρτο πεντάγωνο, και ούτω καθεξής. Κάθε τετράγωνος προστίθεται σε έναν τρίγωνο μιας τάξης αμέσως προηγούμενης από αυτό. Για παράδειγμα, ο δεύτερος τετράγωνος 4, όταν προστεθεί στον πρώτο τρίγωνο 1, παράγει το δεύτερο πεντάγωνο 5. Ομοίως, ο τρίτος τετράγωνος 9, όταν προστεθεί στο δεύτερο τρίγωνο 3, σχηματίζει τον τρίτο πεντάγωνο 12. Και το ίδιο για τους υπόλοιπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

Σχετικά με τα εξάγωνα, τα επτάγωνα και τη γένεση τους. Μια γενική μέθοδος εύρεσης της γένεσης όλων των σχημάτων, κ.λπ.

Οι πλευρές των εξαγώνων και των επταγώνων αυξάνουν κατά τον ακόλουθο τρόπο. Για τη γένεση των τριγωνικών α-

ριθμών προστίθενται εκείνοι οι όροι που ακολουθούν ο ένας τον άλλο σε μια φυσική τάξη και υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά μια μονάδα μόνο. Η γένεση των τετραγώνων επιτυγχάνεται με την πρόσθεση αριθμών, που ο ένας υπερβαίνει τον άλλο κατά 2, καθώς παραλείπεται ένας όρος. Στη γένεση των πενταγώνων παραλείπονται δύο όροι, και οι προστιθέμενοι αριθμοί που σχηματίζουν τους πεντάγωνους, υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 3. Συνεπώς, για τη γένεση του εξάγωνου παραλείπονται τρεις όροι και προστίθενται εκείνοι που υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 4. Αυτοί οι όροι θα είναι πράγματι οι ρίζες και πηγές, που από το σύνολο τους θα παραχθούν όλοι οι εξάγωνοι. Αυτές οι ρίζες επομένως είναι οι αριθμοί 1, 5, 9, 13, 17, 21, κ.λπ., και από την πρόσθεση αυτών, θα σχηματιστούν εξάγωνοι, δηλαδή 1, 6, 15, 28, 45, 66, κ.λπ.

Για τη γένεση των επταγώνων, αφού παραλειφθούν τέσσερις όροι, εκείνοι που υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά 5 πρέπει να προστεθούν και αυτοί οι αριθμοί, καθώς παρατηρήθηκε προηγουμένως, θα είναι οι ρίζες και οι πηγές αυτών:

1, 6, 11, 16, 21

Οι επτάγωνοι που σχηματίζονται από την πρόσθεση αυτών είναι, 1, 7, 18, 34, 55.

Τα σχήματα ενός οκταγώνου, ενός εννεαγώνου, ή σχήματα με οκτώ και με εννέα γωνίες, παράγονται σύμφωνα με την ίδια τάξη, έτσι που οι πρώτοι αριθμοί, ή οι ρίζες αυτών, απέχουν μεταξύ τους σύμφωνα με μια ισότιμη πρόοδο. Δηλαδή για τη γένεση των οκταγώνων παραλείπονται πέντε όροι και για τη γένεση των εννεαγώνων έξι όροι. Εν συντομία, καθώς ο αριθμός των παραλειπόμενων όρων αυξάνει συνεχώς κατά 1, η σειρά των επίπεδων αριθμών θα σχηματίζεται με την πρόσθεση των εναπομεινάντων όρων.

ΒΙΒΛΙΟ ΔΥΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

Σχετικά με τους επίπεδους αριθμούς που παράγονται από επίπεδους- και ότι ο τριγωνικός αριθμός είναι η αρχή όλων των υπόλοιπων. Μια θεώρηση που αναφέρεται στην περιγραφή των επίπεδων αριθμών.

Εφόσον υφίστανται οι επίπεδοι αριθμοί, ας ερευνήσουμε στη συνέχεια ποια είναι η συνέπεια της ύπαρξής τους. Όλοι οι τετράγωνοι που τοποθετούνται κάτω από τρίγωνους σε μία φυσική διάταξη, παράγονται από τρίγωνους αριθμούς. Έτσι, ο τετράγωνος 4 σχηματίζεται από την πρόσθεση του 1 και του 3, δηλαδή από δύο τρίγωνους αριθμούς. Ομοίως, το 9 σχηματίζεται από το 3 και το 6, που είναι τρίγωνοι. Το 16 σχηματίζεται από τους τρίγωνους 6 και 10 και το 25 από τους τρίγωνους 10 και 15. Το ίδιο πράγμα στη διαδοχική τάξη τετράγωνων θα βρεθεί να συμβαίνει διαρκώς χωρίς καμία αλλαγή. Και οι πεντάγωνοι γεννιούνται από την πρόσθεση τετράγωνων και τριγώνων. Έτσι ο πεντάγωνος 5 παράγεται από την πρόσθεση του τετράγωνου 4 και του τρίγωνου 1. Ομοίως, ο πεντάγωνος 12 σχηματίζεται από την πρόσθεση του τετράγωνου 9 και του τρίγωνου 6. Ο πεντάγωνος 22 σχηματίζεται από τον τετράγωνο 16 και τον τρίγωνο 6. Και ο πεντάγωνος 35, από τον τετράγωνο 25 και τον τρίγωνο 10. Κατά τον ίδιο τρόπο σχηματίζονται όλοι οι πεντάγωνοι.

Επίσης, αν στρέψουμε την προσοχή μας στους εξάγωνους, θα ανακαλύψουμε ότι σχηματίζονται από το άθροισμα τρίγωνων και πεντάγωνων. Έτσι ο εξάγωνος 6 σχηματίζεται από την πρόσθεση του πεντάγωνου 5 και του πρώτου εν δυνάμει τρίγωνου, του 1. Ομοίως, ο εξάγωνος 15 γεννάται από το άθροισμα του πεντάγωνου 12 και του τρίγωνου 3. Και πάλι, ο εξάγωνος 28 σχηματίζεται από τον πεντάγωνο 22 και τον τρίγωνο 6. Κατά έναν ίδιο τρόπο σχηματίζονται και οι υπόλοιποι.

Το ίδιο συμβαίνει και στους επτάγωνους. Διότι ο επτάγωνος 7 παράγεται από τον εξάγωνο 6 και τον τρίγωνο 1. Ο

επτάγωνος 18 από τον εξάγωνο 15 και τον τρίγωνο 3. Ο επτάγωνος 34 από τον εξάγωνο 28 και τον τρίγωνο 6. Και αυτό θα βρεθεί να συμβαίνει σε όλους τους πολυγωνικούς αριθμούς. Είναι φανερό επομένως ότι ο τρίγωνος αριθμός είναι η αρχή όλων των επίπεδων αριθμών.

Όταν όμως αυτοί συγκρίνονται μεταξύ τους, δηλαδή οι τρίγωνοι με τους τετράγωνους, ή οι τετράγωνοι με τους πεντάγωνους, ή οι πεντάγωνοι με τους εξάγωνους, ή αυτοί πάλι με τους επτάγωνους, αναμφίβολα θα υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά τρίγωνους. Διότι αν το τρίγωνο 3 συγκριθεί με το τετράγωνο 4, ή το τετράγωνο 4 με το πεντάγωνο 5, ή το 5 με το εξάγωνο 6, ή το 6 με το επτάγωνο 7, αυτά θα υπερβαίνουν το ένα το άλλο κατά το πρώτο τρίγωνο, δηλαδή κατά τη μονάδα μονάχα. Και αν το 6 συγκριθεί με το 9, ή το 9 με το 12, ή το 12 με το 15, ή το 15 με το 18, αυτά θα υπερβαίνουν το ένα το άλλο κατά το δεύτερο τρίγωνο, δηλαδή κατά το 3. Επίσης, αν το 10 συγκριθεί με το 16, ή το 16 με το 22, ή το 22 με το 28, ή το 28 με το 34, αυτά θα υπερβαίνουν το ένα το άλλο κατά το τρίτο τρίγωνο, δηλαδή κατά 6. Όμοια θα παρουσιάζεται η κατάσταση με όλους τους επίπεδους αριθμούς, γιατί όλοι τους θα υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά τρίγωνα. Συνεπώς είναι ολοφάνερο ότι το τρίγωνο είναι η αρχή και το στοιχείο όλων των σχημάτων.

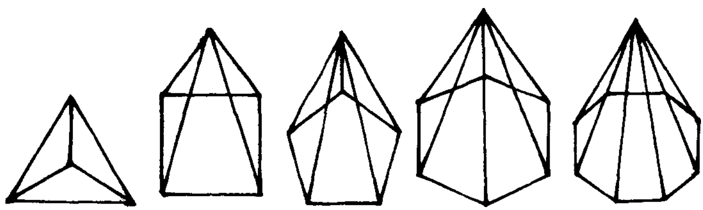
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ

Σχετικά με τους στερεούς αριθμούς. Σχετικά με την πυραμίδα που είναι η αρχή όλων των στερεών σχημάτων -όπως το τρίγωνο είναι των επίπεδων σχημάτων- και τα είδη της.

Είναι λοιπόν τώρα πιο εύκολος ο στοχασμός των στερεών σχημάτων. Διότι έχοντας γνωρίσει πόσο επιδρά η δύναμη της ποσότητας εκ φύσεως στα επίπεδα σχήματα των αριθμών, δε θα υπάρξει κανένα εμπόδιο μετάβασης στους στε-

ρεούς αριθμούς. Όπως δηλαδή προσθέτουμε στο μήκος των αριθμών άλλο ένα διάστημα, την επιφάνεια, έτσι ώστε να παρουσιαστεί το πλάτος, τώρα προσθέτοντας στο πλάτος αυτό που ονομάζεται ύψος, το στερεό σώμα του αριθμού θα ολοκληρωθεί.

Επιπλέον φαίνεται ότι όπως στα επίπεδα σχήματα ο τρίγωνος αριθμός είναι ο πρώτος, έτσι στα στερεά, εκείνος που ονομάζεται πυραμίδα, είναι η αρχή του ύψους. Διότι είναι αναγκαίο να βρεθούν οι θεμελιώδεις αρχές όλων των καθιερωμένων σχημάτων σε αριθμούς. Ένα λοιπόν είδος πυραμίδας είναι εκείνη που υψώνεται από μια τριγωνική βάση· ένα άλλο, από μια πενταγωνική βάση· και άλλες, από άλλες πολυγωνικές βάσεις, όπως φαίνεται στα επόμενα σχήματα:



Οι πυραμίδες αυτές ονομάζονται από τις βάσεις τους· ώστε η πρώτη ονομάζεται τριγωνική, η δεύτερη τετραγωνική, η τρίτη πενταγωνική, η τέταρτη εξαγωνική πυραμίδα· και ούτω καθεξής οι υπόλοιπες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI

Η γένεση των στερεών αριθμών.

Όπως οι γραμμικοί αριθμοί προέρχονται από τη μονάδα όταν επεκταθεί στο άπειρο, δηλαδή 1, 2, 3, 4, 5, 6, κ.λπ. και όπως οι επίπεδοι αριθμοί σχηματίζονται από την πρόσθεση αυτών, κατά έναν όμοιο τρόπο οι στερεοί προκύπτουν από

τη συνένωση επίπεδων αριθμών. Άρα, οι τριγωνικές πυραμίδες σχηματίζονται από την άθροιση των τρίγωνων αριθμών, οι τετράγωνες πυραμίδες από το άθροισμα των τετράγωνων αριθμών οι πενταγωνικές από το άθροισμα των πεντάγωνων ομοίως και οι υπόλοιπες.

Ο πρώτος εν δυνάμει τρίγωνος λοιπόν είναι η μονάδα, η οποία είναι επίσης και η πρώτη πυραμίδα. Ο δεύτερος τρίγωνος είναι το 3· και αυτό προστιθέμενο στο 1, τον πρώτο τρίγωνο, σχηματίζει τη δεύτερη πυραμίδα 4. Εάν σε αυτούς προστεθεί ο τρίτος τρίγωνος 6, η τρίτη πυραμίδα θα γεννηθεί. Και αν προστεθεί ο τέταρτος τρίγωνος 10, θα σχηματιστεί η τέταρτη πυραμίδα 20. Ομοίως σε όλες τις υπόλοιπες θα υπάρχει ο ίδιος τρόπος σύνδεσης.

Τρίγωνα
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

Πυραμίδες από Τρίγωνα
1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220

Στη σύνδεση αυτή είναι αναγκαίο ο τελευταίος από τους αριθμούς που συνενώνονται να είναι πάντοτε η βάση της πυραμίδας. Γιατί αυτός βρίσκεται να είναι περισσότερο εκτεταμένος από όλους τους υπόλοιπους· και όλοι οι αριθμοί που συνενώνονται πριν από αυτόν, είναι αναγκαστικά μικρότεροι, μέχρι που φτάνουμε στη μονάδα, η οποία από μια άποψη κατέχει τη θέση ενός σημείου και μιας κορυφής.

Επίσης, οι τετραγωνικές πυραμίδες δημιουργούνται με την πρόσθεση τετράγωνων αριθμών μεταξύ τους, καθώς θα γίνει φανερό από μια προσεκτική εξέταση του ακόλουθου πίνακα.

Τετράγωνα
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Τετραγωνικές Πυραμίδες
1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385

Κατά τον ίδιο τρόπο παράγονται όλα τα σχήματα που προέρχονται από άλλους πολύγωνους αριθμούς. Διότι κάθε πολυγωνικό σχήμα προέρχεται επ' άπειρον από τη μονάδα, με την πρόσθεση της μονάδας σε ένα σχήμα του δικού του είδους. Άρα, φαίνεται ότι τα τριγωνικά σχήματα είναι κατ' ανάγκη οι αρχές των άλλων σχημάτων, επειδή κάθε πυραμίδα από οποιαδήποτε βάση και αν προέρχεται, είτε από ένα τετράγωνο, ή πεντάγωνο, ή εξάγωνο, ή επτάγωνο, κ.λπ., περιλαμβάνει μόνο τρίγωνα μέχρι την κορυφή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

Σχετικά με την κόλουρο πυραμίδα.

Τέλεια πυραμίδα είναι εκείνη που προχωρώντας από κάποια βάση φτάνει μέχρι τη μονάδα, που είναι η πρώτη εν δυνάμει και ικανότητι πυραμίδα. Η πυραμίδα, όμως, της οποίας το ύψος δε φτάνει μέχρι τη μονάδα, ονομάζεται κόλουρος. Επομένως, αν στον τετράγωνο 16 προστεθεί ο τετράγωνος 9 και στο άθροισμα τους ο τετράγωνος 4, αλλά παραλειφθεί η μονάδα, τότε το σχήμα πραγματικά είναι εκείνο μιας πυραμίδας, αλλά επειδή δε φτάνει μέχρι την κορυφή, ονομάζεται κόλουρος, γιατί δεν έχει για κορυφή της τη μονάδα, που είναι ανάλογη προς ένα σημείο, αλλά μια επιφάνεια. Έτσι, αν η βάση είναι ένα τετράγωνο, η ανώτατη επιφάνεια θα είναι πάλι τετράγωνο. Αν η βάση είναι πεντάγωνο, ή εξάγωνο, ή επτάγωνο, κ.λπ., η ανώτατη επιφάνεια θα έχει το ίδιο σχήμα. Αν όμως η πυραμίδα όχι μόνο δε φτάνει στη μονάδα και στην κορυφή, αλλά ούτε καν στο πρώτο εν ενεργεία πολύγωνο που είναι ίδιο με αυτό της βάσης, ονομάζεται δικόλουρος. Για παράδειγμα, αν μια πυραμίδα προχωρώντας από τον τετράγωνο 16 τελειώνει στον 9 και δε φτάνει στον 4, θα είναι δυο φορές ελλιπής. Εν συντομία, όσα τετράγωνα λείπουν, τόσες φορές η πυραμίδα λέγεται ότι είναι κόλουρος. Και όλες οι πυραμίδες θα ονομάζονται κατά

αυτόν τον τρόπο, από οποιαδήποτε πολυγωνική βάση και αν προέρχονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

Σχετικά με τους αριθμούς που ονομάζονται κύβοι, σφηνίσκοι και παραλληλεπίπεδοι.

Αυτά λοιπόν ήταν αρκετά όσον αφορά τους στέρεους αριθμούς που έχουν το σχήμα μιας πυραμίδας, οι οποίοι αυξάνονται ισομερώς και απορρέουν από ένα αντίστοιχο πολυγωνικό σχήμα σαν από μία ρίζα. Υπάρχει ωστόσο και άλλη μια κανονική σύνθεση στερεών σωμάτων, όπως οι κύβοι, οι σφηνίσκοι και τα παραλληλεπίπεδα, οι επιφάνειες των οποίων είναι αντίθετες μεταξύ τους· όσο και αν προεκταθούν στο άπειρο, δε θα συναντηθούν ποτέ. Ας τοποθετηθούν λοιπόν τα τετράγωνα σε μια κανονική σειρά, δηλαδή 1, 4, 9, 16, 25, κ.λπ., επειδή έχουν μόνο μήκος και πλάτος, αλλά είναι χωρίς ύψος. Αν το καθένα πολλαπλασιαστεί με την πλευρά του, θα έχει ένα ύψος ίσο με το πλάτος ή το μήκος του. Γιατί το τετράγωνο 4 έχει το 2 για πλευρά του και παράγεται από το δύο φορές το δύο. Από τον πολλαπλασιασμό επομένως του τετράγωνου 4 με την πλευρά του 2, γεννάται το σχήμα του κύβου 8. Αυτός είναι ο πρώτος εν ενεργεία κύβος. Ομοίως το τετράγωνο 9 πολλαπλασιαζόμενο με την πλευρά του 3 παράγει τον κύβο 27. Το τετράγωνο 16 πολλαπλασιαζόμενο με την πλευρά του 4 γεννά τον κύβο 64. Κατά όμοιο τρόπο σχηματίζονται και οι άλλοι κύβοι. Επίσης κάθε κύβος που σχηματίζεται από τον πολλαπλασιασμό ενός τετραγώνου με την πλευρά του, θα έχει έξι επιφάνειες, που το επίπεδο της καθεμιάς ισούται με το τετράγωνο που συνέβαλε στο σχηματισμό. Θα έχει επίσης δώδεκα ακμές, η καθεμία τους ίση με την πλευρά του τετραγώνου από την οποία παρήχθη· και οκτώ γωνίες, που η καθεμιά τους θα περιέχεται κάτω

από τρεις τέτοιες γωνίες σαν εκείνες του παράγωγου τετραγώνου.

Επειδή κάθε κύβος προέρχεται από ισόπλευρα μεταξύ τους τετράγωνα, είναι ίσος σε όλα τα μέρη του. Διότι το μήκος ισούται με το πλάτος και το ύψος σε καθένα από αυτά. Ομοίως ισχύει οπωσδήποτε η ισότητα ως προς τις έξι επιφάνειες του, δηλαδή επάνω, κάτω, δεξιά, αριστερά, πίσω και εμπρός.

Συνεπώς, προκειμένου για το στερεό που αντιτίθεται και αντίκειται στον κύβο, είναι απαραίτητο να μην έχει ούτε το μήκος ίσο προς το πλάτος, ούτε το ύψος ίσο με καμία από τις άλλες διαστάσεις, αλλά να είναι όλες άνισες. Στερεά αυτού του είδους είναι τέτοια όπως τρεις φορές το τέσσερα πολλαπλασιαζόμενο με το 2, ή τρεις φορές το τέσσερα πολλαπλασιαζόμενο με το 5, και όλα τα παρεμφερή, τα οποία προκύπτουν άνισα μέσα από άνισους βαθμούς διαστημάτων. Τα στερεά αυτής της μορφής ονομάζονται στα Ελληνικά *σκαληνά σκαληνών,* ενώ στα Λατινικά *Gradati,* επειδή αυξάνουν βαθμιαία από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο. Κάποιοι Έλληνες τα ονομάζουν *σφηνίσκους,* δηλαδή *μικρές σφήνες.* Από κάποιους άλλους Έλληνες ονομάζονταν *βωμίσκοι,* δηλαδή *μικροί βωμοί* -στην περιοχή της Ιωνίας, κατά τον Νικόμαχο, κατασκευάζονταν με τον τρόπο αυτό, έτσι ώστε ούτε το ύψος ήταν ίσο με το πλάτος, ούτε το πλάτος με το μήκος. Ανάμεσα στους κύβους, λοιπόν, που εκτείνονται σε ίσα διαστήματα και σε εκείνα τα στερεά που αυξάνουν βαθμιαία από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, υπάρχουν ως ενδιάμεσα εκείνα που ούτε είναι ίσα σε όλα τα μέρη τους, ούτε άνισα σε όλα· αυτά ονομάζονται παραλληλεπίπεδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIV

Σχετικά με τους ετερομήκεις και τους προμήκεις αριθμούς και τη γένεση αυτών.

Οι αριθμοί που είναι μακρύτεροι στο ένα από τα δύο μέρη τους, όταν εξετασθούν κατά το πλάτος, θα βρεθούν να έχουν τέσσερις γωνίες και τέσσερις πλευρές. Ωστόσο δεν είναι όλες ίσες, αλλά είναι πάντοτε μικρότερες κατά μία μονάδα. Διότι ούτε είναι όλες οι πλευρές ίσες προς όλες, ούτε είναι το πλάτος ίσο με το μήκος· αλλά, όπως είπαμε, το ένα μέρος που είναι μεγαλύτερο, προηγείται και υπερβαίνει το μικρότερο κατά μια μονάδα μονάχα. Αν επομένως η ακολουθία των φυσικών αριθμών τοποθετηθεί σε τάξη, και ο δεύτερος πολλαπλασιαστεί με τον πρώτο, ή ο δεύτερος με τον τρίτο, ή ο τρίτος με τον τέταρτο, ή ο τέταρτος με τον πέμπτο, και ούτω καθεξής, θα παραχθούν οι αριθμοί που ονομάζονται ετερομήκεις:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Τότε 2x1, 2x3, 3x4, 4x5, κ.λπ., δηλαδή οι 2, 6, 12, 20, κ.λπ., θα είναι αριθμοί μακρύτεροι στο έτερο μέρος, ετερομήκεις.

Αν επομένως οι αριθμοί που πολλαπλασιάζονται διαφέρουν ο ένας από τον άλλο μόνο κατά τη μονάδα, θα παραχθούν οι προαναφερθέντες αριθμοί. Αλλά αν διαφέρουν κατά οποιονδήποτε άλλο αριθμό, όπως οι αριθμοί 3x7, ή 3x5 κ.λπ., και οι πλευρές τους δε διαφέρουν μόνο κατά μια μονάδα, αυτοί δεν ονομάζονται *ετερομήκεις,* ή μακρύτεροι κατά το έτερο μέρος, αλλά *προμήκεις.* Διότι ο Πυθαγόρας και οι κληρονόμοι της σοφίας του απέδωσαν το *έτερο,* δηλαδή *άλλο* ή *διαφορετικό,* μόνο στη δυαδικότητα ή δυάδα, την οποία θεώρησαν αρχή της διαφοράς. Και είπαν ότι η πρωταρχική και αδημιούργητη μονάδα ήταν η αρχή μιας φύσης πάντοτε ίδιας, που είναι όμοια και σύμφωνη προς τον εαυτό της. Η δυάδα όμως είναι πρωταρχικά ανόμοια προς τη μονάδα, επειδή είναι η πρώτη που αποδεσμεύεται από αυ-

την. Επομένως είναι η αρχή μιας κάποιας διαφοράς, επειδή είναι ανόμοια μονάχα κατά μια μονάδα προς αυτή την πρώτη ουσία που κατέχει μιαν αναλλοίωτη ομοιότητα ύπαρξης. Άρα οι αριθμοί επαξίως ονομάζονται «μακρύτεροι στο έτερο», επειδή οι πλευρές τους προηγούνται η μια της άλλης κατά μία μόνο μονάδα.

Ένα επιπρόσθετο επιχείρημα είναι ότι η διαφορά σωστά ορίζεται στο δυαδικό αριθμό, ότι δηλαδή ο όρος *άλλο* ή *διαφορετικό* επιβεβαιώνεται μόνο από δυο πράγματα, από εκείνους που μιλούν βέβαια με ακρίβεια. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι ο περιττός αριθμός αντλεί την ολοκλήρωση του μόνο από τη μονάδα, ενώ ο άρτιος αριθμός μόνο από τη δυάδα. Ως εκ τούτου, πρέπει να ειπωθεί ότι ο περιττός αριθμός συμμετέχει στην ουσία που κατέχει μιαν απαράλλακτη ομοιότητα ύπαρξης, επειδή σχηματίζεται από τη μονάδα, ενώ ο άρτιος αριθμός είναι πλήρης από τη φύση της διαφοράς, επειδή αντλεί την ολοκλήρωση του από τη δυάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV

Οι τετράγωνοι δημιουργούνται από περιττούς αριθμούς· ενώ οι ετερομήκεις από άρτιους αριθμούς.

Αν όλοι οι περιττοί αριθμοί παραταχθούν με αρχή τη μονάδα και κάτω ακριβώς από αυτούς τοποθετηθούν οι άρτιοι αριθμοί με αρχή τη δυάδα, η ένωση των περιττών αριθμών σχηματίζει τετράγωνους και η ένωση των άρτιων αριθμών παράγει ετερομήκεις. Επειδή αυτή είναι η φύση των τετράγωνων, δηλαδή να παράγονται από περιττούς αριθμούς που συμμετέχουν στη μονάδα, δηλαδή σε μια ουσία απαράλλακτα ίδια, και επειδή αυτά είναι ίσα σε όλα τα μέρη τους, οι γωνίες ίσες προς τις γωνίες, οι πλευρές προς τις πλευρές, το πλάτος προς το μήκος, πρέπει να ειπωθεί ότι οι αριθμοί αυτού του είδους συμμετέχουν στην αναλλοίωτη ουσία. Και πρέπει να αποδείξουμε ότι εκείνοι οι αριθμοί, που η ισοτι-

μία ή αρτιότητα γεννά *μακρύτερους στο έτερο μέρος,* συμμετέχουν στη φύση της διαφοράς. Διότι όπως το 1 διαφέρει από το 2 μόνο κατά 1, έτσι οι πλευρές των αριθμών αυτών διαφέρουν μεταξύ τους μονάχα κατά μία μονάδα. Ας τοποθετήσουμε λοιπόν σε τάξη όλους τους περιττούς αριθμούς με αρχή τη μονάδα και κάτω από αυτούς όλους τους άρτιους αριθμούς με αρχή το 2, δηλαδή:

1	3	5	7	9	11	13
2	4	6	8	10	12	14

Ηγείται λοιπόν της περιττής σειράς η μονάδα, που είναι από μόνη της η ικανή αιτία και κατά κάποιον τρόπο μια μορφή της ανισότητας. Έτσι, με συνέπεια προς την ομοιότητα και την αναλλοίωτη φύση της, όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό της, είτε σε πλάτος είτε σε ύψος, διατηρεί τη μορφή της, ή αν πολλαπλασιαστεί με κάποιον άλλο αριθμό, αυτός ο αριθμός δεν απομακρύνεται από τη δική του ποσότητα —μια ιδιότητα που δεν μπορεί να βρεθεί σε κανένα άλλο αριθμό. Αλλά η δυάδα είναι ο ηγέτης της άρτιας σειράς και είναι ομοίως η αρχή κάθε διαφοράς. Διότι αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό της είτε σε πλάτος είτε σε ύψος, είτε με κάποιον άλλο αριθμό, αμέσως θα παράγει έναν αριθμό διαφορετικό από αυτήν. Και οι τετράγωνοι αριθμοί παράγονται προσθέτοντας τους όρους της παραπάνω ακολουθίας των περιττών, τον ένα με τον άλλο. Έτσι $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, $1+3+5+7+9=25$, και το ίδιο για τους υπόλοιπους. Ωστόσο από την πρόσθεση των όρων της ακολουθίας των άρτιων αριθμών παράγονται οι ετερομήκεις. Διότι ο πρώτος όρος της ακολουθίας, το 2, παράγεται από δύο φορές το ένα. Και $2+4=6$, και το 6 παράγεται από το 3 πολλαπλασιαζόμενο επί 2. Επίσης, $2+4+6=12$, και το 12 παράγεται από το 4 πολλαπλασιαζόμενο επί 3. Ομοίως παράγονται όλοι οι υπόλοιποι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVI

Σχετικά με τη γένεση και τον ορισμό των αριθμών που ονομάζονται πλινθία και εκείνων που ονομάζονται δοκίδες -ή στηλίδες. Σχετικά με τους κυκλικούς ή σφαιρικούς αριθμούς.

Οι αριθμοί που ονομάζονται πλινθία, είναι επίσης στερεοί και παράγονται με τον ακόλουθο τρόπο. Όταν διαστήματα επεκταθούν εξίσου κατά μήκος και πλάτος, αλλά έχουν μικρότερο ύψος, ο στερεός αριθμός που παράγεται από αυτά ονομάζεται *πλινθίο* (στα λατινικά *laterculus).* Τέτοιου είδους είναι 3 x 3 x 2 = 18 ή 4 x 4 x 2 = 32, ή οποιοιδήποτε άλλοι τέτοιου τύπου. Ορίζονται ως στερεοί που παράγονται από τον πολλαπλασιασμό ίσων αριθμών μεταξύ τους και ακολούθως με ένα μικρότερο αριθμό. Οι στερεοί όμως που ονομάζονται *δοκίδες* ή *στηλίδες* παράγονται από ίσους όρους που πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους και ακολούθως με ένα μεγαλύτερο όρο, όπως 4x4x9=144. *Σφηνίσκοι,* ή *μικρές σφήνες,* ονομάζονται οι στερεοί αριθμοί που παράγονται από τον πολλαπλασιασμό άνισων μεταξύ τους αριθμών. Ενώ οι κύβοι παράγονται από τον πολλαπλασιασμό ίσων αριθμών.

Αλλά οι κύβοι, των οποίων το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι ίδιο με τον αριθμό από τον οποίο ξεκίνησε η πλευρά της κυβικής ποσότητας, ονομάζονται σφαιρικοί· και τέτοιοι είναι οι πολλαπλασιασμοί που προέρχονται από τους αριθμούς 5 και 6. Γιατί 5 x 5 = 25, ο πολλαπλασιασμός αρχίζει από το 5 και τελειώνει στο 5. Και πάλι 25 x 5 = 125. Και αν αυτό πάλι πολλαπλασιαστεί με το 5, το τελευταίο ψηφίο θα είναι πάλι το 5. Ούτε και θα υπάρξει καμία αλλαγή στο λήγοντα αριθμό, έστω και αν ο πολλαπλασιασμός συνεχιστεί επ' άπειρον. Το ίδιο πράγμα[2] επίσης θα συμβαίνει με όλα τα γινόμενα του 6. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται κυκλικοί ή σφαιρικοί, επειδή καταλήγουν στην αρχή από την οποία προήλθαν, όπως ο κύκλος ή η σφαίρα. Η μονάδα, επίσης,

είναι εν δυνάμει ή ικανότητι όπως ο κύκλος ή η σφαίρα, γιατί σε οποιαδήποτε δύναμη και αν υψωθεί, λήγει πάντα στον εαυτό της από όπου και ξεκίνησε. Αν υπάρχει λοιπόν ένας μόνο πολλαπλασιασμός, παράγεται μια επιφάνεια και δημιουργείται ένας κύκλος, αλλά με ένα δεύτερο πολλαπλασιασμό σχηματίζεται μια σφαίρα. Διότι ο δεύτερος πολλαπλασιασμός έχει πάντοτε για αποτέλεσμα το ύψος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVII

Σχετικά με τη φύση της ομοιότητας και της διαφοράς και τους αριθμούς που συμμετέχουν σε αυτές.

Αυτά λοιπόν επαρκούν όσον αφορά τα στερεά σχήματα. Αλλά εκείνοι που εμβάθυναν περισσότερο στην έρευνα των πρώτων αρχών του πραγμάτων και έδωσαν στη φύση όλων των όντων ένα διττό διαχωρισμό, ισχυρίζονται ότι στην ουσία όλων των πραγμάτων συμμετέχουν η ομοιότητα και η διαφορά, η πρώτη από τις οποίες είναι η αιτία ενός αναλλοίωτου και η τελευταία ενός μεταβλητού τρόπου ύπαρξης. Ομοίως, αυτές οι δύο αρχές έχουν σχέση με τη μονάδα και τη δυάδα, η τελευταία από τις οποίες, λόγω του ότι είναι ο πρώτος αριθμός που αποχωρεί από την μονάδα, καθίσταται *διαφορετική.* Επειδή όλοι οι περιττοί αριθμοί σχηματίζονται σύμφωνα με τη φύση της μονάδας και οι αριθμοί που προκύπτουν από την πρόσθεση αυτών είναι τετράγωνα, έτσι τα τετράγωνα λέγεται ότι συμμετέχουν στην ομοιότητα με διπλό τρόπο. Αρχικά επειδή τα ίδια σχηματίζονται από ισότητα, εφόσον το καθένα παράγεται από τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με τον εαυτό του και τόσο οι γωνίες όσο και οι πλευρές είναι ίσες μεταξύ τους, και κατά δεύτερον επειδή αυτά παράγονται από την ένωση των περιττών αριθμών. Αλλά οι άρτιοι αριθμοί, επειδή είναι οι μορφές της δυαδικότητας και οι προσθέσεις αυτών σχηματίζουν τους *ετερομήκεις* αριθμούς, λέγεται ότι μέσω της φύσης της δυάδας απομα-

κρύνονται από τη φύση της ομοιότητας και συμμετέχουν σε αυτή της διαφοράς. Ενώ λοιπόν οι πλευρές των τετράγωνων ξεκινώντας από την ισότητα τείνουν προς αυτή, αντίθετα οι *ετερομήκεις* αριθμοί, λόγω της πρόσθεσης της μονάδας, απoχωρούν από την ισότητα των πλευρών και εξαιτίας αυτού συγκροτούνται από πλευρές που είναι ανόμοιες και κατά μια άποψη διαφορετικές η μία από την άλλη. Κάθε πράγμα άϋλο, επομένως, λόγω του αμετάβλητου που το διακρίνει, συμμετέχει στη φύση της ομοιότητας· ενώ κάθε πράγμα υλικό, εξαιτίας της μεταβλητής και ασταθούς φύσης του, συμμετέχει στη φύση της διαφοράς.

Πρέπει λοιπόν τώρα να δειχθεί ότι όλα τα είδη των αριθμών και όλες οι καταστάσεις, είτε πρόκειται για σχετική ποσότητα, όπως των πολλαπλάσιων ή των επιμόριων κ.λπ., είτε για ποσότητα που εξετάζεται από μόνη της, γίνονται κατανοητά με αυτή τη διπλή φύση των αριθμών, δηλαδή των τετράγωνων και των ετερομηκών. Όπως επομένως ο κόσμος αποτελείται από μία αμετάβλητη και μία μεταβλητή ουσία, έτσι κάθε αριθμός σχηματίζεται από τετράγωνα, που συμμετέχουν στο αμετάβλητο, και από *ετερομήκεις,* που συμμετέχουν στη μεταβλητότητα. Κατ' αρχάς, οι αριθμοί που είναι *προμήκεις* πρέπει να διακριθούν από εκείνους που είναι *ετερομήκεις.* Διότι οι τελευταίοι παράγονται από τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών που διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία μονάδα, όπως το 6 που παράγεται από το 2 πολλαπλασιασμένο επί 3, ή το 12 που παράγεται από το 4 πολλαπλασιασμένο επί 3. Αλλά οι προμήκεις αριθμοί παράγονται από τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών που διαφέρουν μεταξύ τους περισσότερο από τη μονάδα, όπως 3x5 ή 3x6 η 4x7. Επειδή λοιπόν είναι περισσότερο εκτεταμένοι στο μήκος από όσο στο πλάτος, πολύ σωστά ονομάζονται *προμήκεις* ή *μακρύτεροι στο πρόσθιο μέρος* Αλλά τα τετράγωνα, επειδή το πλάτος τους είναι ίσο με το μήκος τους, μπορούν σωστά να ονομαστούν *ανάλογου μήκους* ή *ίδιου πλάτους.* Αντίθετα οι *ετερομήκεις,* επειδή δεν εκτείνονται στο ίδιο μήκος, ονομάζονται *άλλον μήκους* και *μακρύτεροι στο έτερο μέρος.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVIII

Όλα τα πράγματα αποτελούνται από ομοιότητα και διαφορά. Η αλήθεια αυτή επιβεβαιώνεται πρωταρχικά στους αριθμούς.

Κάθε πράγμα όμως, που από τη φύση και την ουσία του είναι αμετάβλητο, είναι ορισμένο και συγκεκριμένο· διότι εκείνο που δεν επιδέχεται καμία αλλαγή, ποτέ δεν παύει να υπάρχει και ποτέ δεν μπορεί να είναι κάτι που δεν ήταν. Η μονάδα είναι αυτού του είδους· και οι αριθμοί εκείνοι που σχηματίζονται από τη μονάδα, λέγεται ότι είναι συγκεκριμένοι και ότι κατέχουν μιαν ομοιότητα ύπαρξης. Αυτοί, ωστόσο, είναι τέτοιοι που αυξάνονται από ίσους αριθμούς όπως οι τετράγωνοι, ή εκείνοι που σχηματίζονται από τη μονάδα, δηλαδή οι περιττοί αριθμοί. Αντιθέτως η δυάδα και όλοι οι *ετερομήκεις* αριθμοί, ως συνέπεια του αποχωρισμού τους από μια συγκεκριμένη ουσία, λέγεται ότι έχουν μεταβλητή και αόριστη φύση. Κάθε αριθμός επομένως αποτελείται από περιττούς και άρτιους, οι οποίοι διαφέρουν κατά πολύ και είναι αντίθετοι μεταξύ τους. Διότι οι πρώτοι είναι η σταθερότητα και οι τελευταίοι η ασταθής αλλαγή. Οι πρώτοι κατέχουν τη δύναμη μιας αμετακίνητης ουσίας, ενώ οι τελευταίοι είναι μια κινητή μεταλλαγή. Οι πρώτοι είναι συγκεκριμένοι, αλλά οι τελευταίοι είναι μια ασαφής συσσώρευση πλήθους. Αυτοί όμως, αν και αντίθετοι, είναι κατά κάποιο τρόπο ενωμένοι με φιλία και συμμαχία· και μέσω της δημιουργού δύναμης και της κυριαρχίας της μονάδας παράγουν ένα σώμα αριθμού. Εκείνοι επομένως που στοχάστηκαν σχετικά με τον κόσμο και την ίδια την κοινή φύση των πραγμάτων, δεν όρισαν ανώφελα, ούτε απερίσκεπτα πως πρόκειται για τον πρώτο διαχωρισμό της ουσίας του σύμπαντος. Ο Πλάτωνας στον *Τίμαιο* ονομάζει κάθε πράγμα που περιέχει ο κόσμος απόγονο της ομοιότητας και της διαφοράς. Ισχυρίζεται ότι υπάρχει ένα πράγμα που είναι πάντοτε αληθινό ον, αδιαίρετο και αγέννητο, και ένα άλλο που γεννάται ή συνεχώς έρχεται

σε ύπαρξη και είναι διαιρετό, αλλά ποτέ δεν υπάρχει αληθινά. Και ο Φιλόλαος λέει πως αναγκαστικά οτιδήποτε υπάρχει, είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο, διότι ήθελε να αποδείξει ότι όλα τα πράγματα απαρτίζονται είτε από άπειρα είτε από πεπερασμένα, σύμφωνα προς το αντίστοιχο του αριθμού. Διότι σχηματίζονται από την ένωση της μονάδας και της δυάδας, από τον περιττό και τον άρτιο, που αποδεδειγμένα ανήκουν στην ίδια σειρά όπως ισότητα και ανισότητα, ομοιότητα και διαφορά, συγκεκριμένο και αόριστο. Έτσι, δεν υποστηρίζεται αναίτια η άποψη ότι όλα τα πράγματα που αποτελούνται από αντίθετα, ενώνονται και συντίθενται από μια κάποια αρμονία. Διότι η αρμονία είναι ένωση πολλών πραγμάτων και συμφωνία των αντίθετων φύσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIX

Από τη φύση των αριθμών που χαρακτηρίζονται από ομοιότητα και από τη φύση εκείνων που χαρακτηρίζονται από διαφορά, δηλαδή από τους τετράγωνους και τους ετερομήκεις, συνίστανται όλες οι σχέσεις των αναλογιών.

Ας τοποθετήσουμε λοιπόν τώρα σε μια κανονική σειρά, όχι τους άρτιους και περιττούς αριθμούς, από τους οποίους παράγονται οι τετράγωνοι και οι ετερομήκεις αριθμοί, αλλά τα ίδια τα δύο τελευταία είδη αριθμών. Με αυτόν τον τρόπο θα παρατηρήσουμε κάποια συμφωνία αυτών στην παραγωγή των άλλων ειδών αριθμών. Ας πάρουμε λοιπόν δύο ακολουθίες, μία των τετράγωνων με αρχή τη μονάδα και μία των *ετερομηκών* με αρχή τη δυάδα, δηλαδή:

1	4	9	16	25	36	49
2	6	12	20	30	42	56

Αν, λοιπόν, ο πρώτος όρος της μιας ακολουθίας συγκριθεί με τον πρώτο όρο της άλλης, θα βρεθεί η ποσότητα του διπλάσιου, που είναι το πρώτο είδος της πολλαπλασιότητας. Αλλά αν ο δεύτερος όρος της μιας συγκριθεί με το δεύτερο όρο της άλλης, παράγεται η κατάσταση της ημιόλιος ποσότητας. Εάν ο τρίτος συγκριθεί με τον τρίτο, γεννάται ο επίτριτος λόγος. Εάν ο τέταρτος με τον τέταρτο, ο επιτέταρτος, και αν ο πέμπτος με τον πέμπτο, ο επίπεμπτος λόγος. Έτσι συνεχίζοντας *επ' άπειρον,* επιμόριος λόγος θα παράγεται αμετάβλητα. Στον πρώτο λόγο όμως, που είναι εκείνος του δυο προς ένα, η διαφορά ανάμεσα στους δύο όρους είναι μονάχα 1, αλλά στον ημιόλιο λόγο η διαφορά είναι 2. Στον επίτριτο η διαφορά είναι 3, ενώ στον επιτέταρτο 4. Άρα, σύμφωνα με τον επιμόριο σχηματισμό των αριθμών, η διαφορά συνεχώς αυξάνεται κατά 1. Αν πάλι, ο δεύτερος τετράγωνος συγκριθεί με τον πρώτο ετερομήκη αριθμό, ο τρίτος με το δεύτερο, ο τέταρτος με τον τρίτο, ο πέμπτος με τον τέταρτο, κ.λπ., ίδιοι λόγοι θα παραχθούν, δηλαδή επιμόριοι. Εδώ όμως, η αρχική διαφορά των δύο όρων δεν είναι η μονάδα αλλά η δυάδα. Κατόπιν συνεχίζει με τους ίδιους όρους *επ' άπειρον.* Και ο δεύτερος όρος της μιας σειράς θα είναι διπλάσιος από τον πρώτο όρο της άλλης. Ο τρίτος της μιας θα είναι ημιόλιος του δεύτερου της άλλης. Ο τέταρτος θα είναι επίτριτος του τρίτου· και ούτω καθεξής, σύμφωνα με τη συμφωνία που επιδείχθηκε παραπάνω.

Επιπροσθέτως, οι τετράγωνοι διαφέρουν μεταξύ τους κατά περιττούς αριθμούς, ενώ οι ετερομήκεις κατά άρτιους αριθμούς.

Αν όμως ο πρώτος *ετερομήκης* αριθμός τοποθετηθεί ανάμεσα στον πρώτο και δεύτερο τετράγωνο, θα σχηματίζει με τον καθένα από αυτούς λόγο δύο προς ένα. Αν, επίσης, ο δεύτερος *ετερομήκης* τοποθετηθεί ανάμεσα στο δεύτερο και τρίτο τετράγωνο, η μορφή του ημιόλιου λόγου θα παραχθεί και στους δύο όρους. Αν ο τρίτος από αυτούς τους αριθμούς τοποθετηθεί ανάμεσα στον τρίτο και τέταρτο τετράγωνο, θα δημιουργηθεί ο επίτριτος λόγος. Εφαρμόζοντας συνεπώς τον

			Διαφορά Περιττών			
	3	5	7	9	11	13
1	4	9	16	25	36	49
			Τετράγωνοι			
			Διαφορά Αρτίων			
	4	6	8	10	12	14
2	6	12	20	30	42	56
			Ετερομήκεις			

τρόπο αυτό στους υπόλοιπους, όλα τα επιμόρια είδη θα παραχθούν.

Επιπλέον, αν δύο από τους παραπάνω τετράγωνους αριθμούς προστεθούν και ο ενδιάμεσος *ετερομήκης* αριθμός πολλαπλασιαστεί με το 2 και προστεθεί στο άθροισμα τους, το προκύπτον άθροισμα θα είναι ένας τετράγωνος αριθμός. Για παράδειγμα 1+4=5, και το 5 προστιθέμενο στο 2 x 2 ισούται με 9. Ομοίως, 4+9=13 και το 13 προστιθέμενο στο 2x6 ισούται με 25. Το ίδιο ισχύει για τους υπόλοιπους. Αν η διαδικασία αντιστραφεί και ανάμεσα στους δύο πρώτους *ετερομήκεις* αριθμούς τοποθετηθεί ο δεύτερος τετράγωνος -που είναι στην τάξη ο δεύτερος, αλλά εν ενεργεία ο πρώτος- και αν αυτός ο τετράγωνος διπλασιαστεί και προστεθεί στο άθροισμα των δύο άλλων όρων, το άθροισμα θα είναι πάλι ένας τετράγωνος. Για παράδειγμα, προσθέτουμε αρχικά το 2 με το 6 και μετά προσθέτουμε το διπλάσιο του 4. Το άθροισμα είναι ο τετράγωνος 16. Ομοίως, αν προστεθούν ο δεύτερος και τρίτος *ετερομήκης* όρος και στο άθροισμα τους προσθέσουμε το διπλάσιο του τρίτου τετράγωνου, δηλαδή αν στο 12+6=18 προστεθεί το διπλάσιο του 9, το άθροισμα θα είναι ο τετράγωνος 36. Επίσης, 12+20=32, προστιθέμενο στο διπλάσιο του 16, ισούται με τον τετράγωνο 64· και το ίδιο για τους υπόλοιπους.

Είναι επίσης αξιοθαύμαστο ότι όταν ένας *ετερομήκης* αριθμός τοποθετηθεί ως μέσο δύο τετραγώνων, και ένας τε-

τράγωνος παραχθεί με την παραπάνω διαδικασία από τους τρεις όρους, ο τετράγωνος που παράγεται, έχει πάντοτε περιττό αριθμό για πλευρά του. Έτσι από 1+4 συν το διπλάσιο του 2, παράγεται ο τετράγωνος 9, η πλευρά του οποίου είναι ο περιττός αριθμός 3. Και ο τετράγωνος 25, που παράγεται από 4+9 συν το διπλάσιο του 6, έχει για πλευρά του τον περιττό αριθμό 5. Επίσης, ο τετράγωνος 49, που προκύπτει από την άθροιση των 9, 16 και του διπλάσιου του 12, έχει για πλευρά του τον περιττό αριθμό 7. Το ίδιο θα βρεθεί να συμβαίνει και στους υπόλοιπους.

Αντίθετα, όταν ένας τετράγωνος υφίσταται μεταξύ δύο *ετερομηκών* αριθμών όλοι οι τετράγωνοι που παράγονται από αυτούς, θα έχουν άρτιους αριθμούς για πλευρές τους. Έτσι, ο τετράγωνος 16, παραγόμενος από την πρόσθεση των 2, 6 και του διπλάσιου του 9, έχει πλευρά τον άρτιο αριθμό 6. Επίσης, ο τετράγωνος 64, παραγόμενος από την πρόσθεση των 12, 20 και του διπλάσιου του 16, έχει πλευρά τον άρτιο αριθμό 8. Το ίδιο συμβαίνει και με τους υπόλοιπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XX

Από τετράγωνους και ετερομήκεις αριθμούς συνίστανται όλα τα αριθμητικά σχήματα. Με ποιον τρόπο οι ετερομήκεις αριθμοί παράγονται από τους τετράγωνους και αντίστροφα.

Αξίζει επίσης να παρατηρηθεί ότι από αυτούς τους δύο παράγονται όλα τα σχήματα. Διότι τα τρίγωνα που είναι τα αρχικά στοιχεία όλων των άλλων αριθμητικών σχημάτων, όπως δείξαμε προηγουμένως, προκύπτουν από τα αθροίσματα αυτών. Έτσι, από το 1, που είναι ο πρώτος τετράγωνος εν δυνάμει ή ικανότητι, και το 2, που είναι ο πρώτος ετερομήκης αριθμός, σχηματίζεται ο τρίγωνος 3. Επίσης από το 2 και το 4, το δεύτερο τετράγωνο, γεννιέται ο τρίγωνος 6. Ομοίως, από το 4 και το 6 προκύπτει ο τρίγωνος 10· και το

ίδιο για τους υπόλοιπους. Ας τοποθετήσουμε λοιπόν εναλλάξ τους τετράγωνους και τους *ετερομήκεις* αριθμούς, και ας τοποθετήσουμε από κάτω τους τρίγωνους που παράγονται από αυτούς, όπως ακολούθως:

Τετράγωνοι και Ετερομήκεις διατεταγμένοι εναλλάξ

1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	

Τρίγωνοι

Αλλά κάθε τετράγωνος, αν η πλευρά του προστεθεί σε αυτόν ή αφαιρεθεί από αυτόν, μετατρέπεται σε ετερομήκη αριθμό. Αν δηλαδή στον τετράγωνο 4 προστεθεί η πλευρά του 2, το άθροισμα είναι 6, και αν το 2 αφαιρεθεί από το 4, το υπόλοιπο είναι 2. Και οι δύο αριθμοί 6 και 2 είναι *ετερομήκεις.* Ομοίως, προσθέτοντας το 3 στο 9 και αφαιρώντας το 3 από αυτό παράγονται τα 12 και 6, που είναι αριθμοί ετερομήκεις. Αυτό όμως προκύπτει από τη μεγάλη δύναμη της διαφοράς. Διότι κάθε πεπερασμένη και ορισμένη δύναμη, όταν αποχωρεί από τη φύση της ισότητας και από την ουσία που περιέχεται μέσα στα όρια της, γίνεται είτε υπεράφθονη είτε ελλιπής, κλίνει προς το μεγαλύτερο ή το μικρότερο. Αντίθετα, αφαιρώντας την πλευρά του τετραγώνου από το μεγαλύτερο, ή προσθέτοντας την στο μικρότερο *ετερομήκη* αριθμό, ο ενδιάμεσος τετράγωνος θα παραχθεί. Έτσι, 6-2, ή 2 + 2 ισούται με 4.

Φαίνεται λοιπόν κατ' αρχάς ότι η μονάδα είναι η αρχή μιας ουσίας τελείως αμετάβλητης και όμοιας, ενώ η δυάδα είναι η αρχή της διαφοράς και της μεταβολής. Κατά δεύτερον φαίνεται ότι όλοι οι περιττοί αριθμοί, εξ αιτίας της συνάφειας τους με τη μονάδα, συμμετέχουν στην ουσία που είναι απαράλλακτα όμοια, ενώ οι άρτιοι αριθμοί, εξαιτίας της συνάφειας τους με τη δυάδα, αναμιγνύονται με τη διαφορά. Επομένως, οι τετράγωνοι, επειδή η σύνθεση και η συνένωση τους γίνεται από περιττούς αριθμούς, συμμετέχουν σε μιαν αμετάβλητη ουσία. Αντίθετα οι *ετερομήκεις* αριθμοί, επειδή

γεννιούνται από τη συνένωση άρτιων αριθμών, ποτέ δεν αποχωρίζονται την ανομοιότητα της διαφοράς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXI

Ποια συμφωνία υπάρχει στη διαφορά και το λόγο, ανάμεσα στους τετράγωνους και τους ετερομήκεις αριθμούς, όταν αυτοί διαταχθούν εναλλάξ.

Αν, λοιπόν, οι τετράγωνοι και οι ετερομήκεις αριθμοί διαταχθούν εναλλάξ, υπάρχει τέτοια σύνδεση μεταξύ τους, ώστε κάποιες φορές παρουσιάζουν τους ίδιους λόγους, αλλά όχι τις ίδιες διαφορές· ενώ άλλες φορές παρουσιάζουν τις ίδιες διαφορές, αλλά διαφορετικούς λόγους. Ας τους διατάξουμε λοιπόν εναλλάξ αρχίζοντας από τη μονάδα, όπως ακολουθεί: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30. Σε αυτή τη διάταξη θα ανακαλύψουμε ότι ανάμεσα στο 1, που είναι ο πρώτος εν δυνάμει τετράγωνος, και το 2 υπάρχει ένας λόγος δυο προς ένα. Εδώ επομένως, ένας τετράγωνος ενώνεται με έναν *ετερομήκη* αριθμό, ο οποίος ενώνεται με τον επόμενο τετράγωνο εμφανίζοντας τον ίδιο λόγο, αλλά όχι την ίδια διαφορά. Γιατί η διαφορά ανάμεσα στο 2 και το 1 είναι η μονάδα, αλλά ανάμεσα στο 4 και το 2 η διαφορά είναι 2. Και πάλι, αν το 4 συγκριθεί με το 2, ο λόγος είναι δύο προς ένα, αλλά αν το 6 συγκριθεί με το 4 ο λόγος είναι ημιόλιος. Σε αυτό το παράδειγμα οι όροι δεν εμφανίζουν τους ίδιους λόγους, αλλά έχουν ίση διαφορά. Γιατί η διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 2 είναι 2, και η ίδια διαφορά υπάρχει ανάμεσα στο 6 και το 4. Στους επόμενους επίσης, κατά τον ίδιο τρόπο όπως στους πρώτους αριθμούς, ο λόγος είναι ίδιος, η διαφορά όμως δεν είναι ίδια. Έτσι, το 4 ενώνεται με το 6, και το 6 με το 9, με ημιόλιο λόγο, αλλά το 6 υπερβαίνει το 4 κατά 2 και το 9 υπερβαίνει το 6 κατά 3. Ομοίως, στους όρους που ακολουθούν, τη μια φορά οι λόγοι είναι ίδιοι, αλλά η διαφορά δεν είναι ίδια· και την άλλη φορά, αντίστροφα, η διαφορά

είναι ίδια, αλλά οι λόγοι διαφέρουν. Επιπροσθέτως, η διαφορά ανάμεσα στους τετράγωνους και τους ετερομήκεις αυξάνει συμφωνά με την ακολουθία των φυσικών αριθμών, αλλά κάθε όρος διαφοράς εμφανίζεται δυο φορές, όπως γίνεται φανερό από τον ακόλουθο πίνακα:

1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Διαφορές

Ωστόσο η συμφωνία και η διαφορά αυτών των δυο ειδών αριθμών μπορεί να γίνει περισσότερο εμφανής, εάν πάρουμε δύο σειρές από αυτούς, στην πρώτη από τις οποίες οι *ετερομήκεις* αριθμοί τοποθετούνται ανάμεσα στους τετράγωνους, ενώ στη δεύτερη οι τετράγωνοι ανάμεσα στους *ετερομήκεις,* όπως παρακάτω:

Άνισες διαφορές		1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
Ετερομήκεις ανάμεσα σε τετράγωνους	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
Ίσες διαφορές		2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
Τετράγωνοι ανάμεσα σε ετερομήκεις	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42

Στην πρώτη από αυτές τις σειρές γίνεται φανερό ότι οι *ετερομήκεις* παρουσιάζουν τον ίδιο λόγο με τους τετράγωνους ανάμεσα στους οποίους έχουν τοποθετηθεί, αλλά δεν έχουν τις ίδιες διαφορές μεταξύ τους. Έτσι το 2 είναι προς το 1 όπως το 4 προς το 2. Και το 6 είναι προς το 4 όπως το 9 προς το 6. Και το 12 είναι προς το 9 όπως το 16 προς το 12. Και το ίδιο για τους υπόλοιπους. Αλλά η διαφορά ανάμεσα στο 1 και στο 2 είναι 1, ενώ ανάμεσα στο 2 και το 4 είναι 2. Η διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 6 είναι 2, αλλά ανάμεσα

στο 6 και το 9 είναι 3. Η διαφορά ανάμεσα στο 9 και το 12 είναι 3, αλλά ανάμεσα στο 12 και το 16 είναι 4. Το ίδιο παρατηρείται και στους υπόλοιπους. Στη δεύτερη όμως από αυτές τις σειρές οι διαφορές είναι ίσες, αλλά οι λόγοι άνισοι. Γιατί ο λόγος του 4 προς το 2 δεν ισούται με αυτόν του 6 προς το 4. Ούτε ο λόγος του 9 προς το 6 είναι ίσος με αυτόν του 12 προς το 9. Ούτε αυτός του 16 προς το 12 ισούται με εκείνον του 20 προς το 16. Ως εκ τούτου, γίνεται φανερό ότι οι τετράγωνοι, όταν τοποθετούνται ανάμεσα σε *ετερομήκεις* αριθμούς, διατηρούν ένα αριθμητικό μέσο όρο. Αντίθετα οι *ετερομήκεις* αριθμοί, όταν τοποθετούνται ανάμεσα σε τετράγωνους, διατηρούν ένα γεωμετρικό μέσο όρο. Έτσι, το 4 είναι το αριθμητικό μέσο στο 2 και το 6. Το 9 είναι το αριθμητικό μέσο ανάμεσα στο 6 και το 12. Τέτοια είναι η θέση του 16 ανάμεσα στο 12 και το 20. Και το ίδιο για τους υπόλοιπους. Αλλά στην άλλη σειρά, το 2 είναι το γεωμετρικό μέσο ανάμεσα στο 1 και το 4, το 6 ανάμεσα στο 4 και το 9, το 12 ανάμεσα στο 9 και το 16 και ούτω καθεξής.

Επίσης, στην πρώτη σειρά, οι διαφορές είναι άνισες ως προς την ποσότητα, αλλά ίσες κατ' όνομα. Δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στο 1 και το 2 είναι 1, και ανάμεσα στο 2 και το 4 η διαφορά είναι 2. Ως προς την ποσότητα, επομένως, το 1 και το 2 είναι άνισα, αλλά ως προς το όνομα ίσα, εφόσον καθένα είναι το ολόκληρο της μικρότερης και το μισό της μεγαλύτερης ποσότητας. Δηλαδή το 1 είναι το ολόκληρο του 1 προς το οποίο ισούται, και μισό του 2. Ομοίως, η διαφορά 2 είναι το ολόκληρο του 2 προς το οποίο ισούται, και το μισό του 4. Και πάλι, το 2 είναι η διαφορά των 4 και 6, και 3 είναι η διαφορά των 6 και 9. Και αυτά είναι άνισα ως προς την ποσότητα, αλλά ίσα κατ' όνομα. Γιατί στον κάθε λόγο η διαφορά είναι το μισό του μικρότερου και ταυτόχρονα το ένα τρίτο του μεγαλύτερου αριθμού. Δηλαδή του 2 είναι το μισό του 4, αλλά και το ένα τρίτο του 6. Το 3 είναι το μισό του 6 αλλά και το ένα τρίτο του 9. Κατά τον ίδιο τρόπο, 3 είναι η διαφορά ανάμεσα στο 9 και το 12, και 4 είναι η διαφορά ανάμεσα στο 12 και το 16· και αυτά είναι άνισα ως προς την ποσότητα, αλλά ίσα κατ' όνομα, αφού το καθένα

είναι το ένα τρίτο του μικρότερου, αλλά και το ένα τέταρτο του μεγαλύτερου. Και το ίδιο οι υπόλοιποι. Είναι λοιπόν φανερό ότι οι διαφορές προχωρούν από το ολικό προς το μερικό. Γιατί η πρώτη και η δεύτερη διαφορά είναι το ολόκληρο και το ένα δεύτερο. Η τρίτη και η τέταρτη διαφορά είναι το ένα δεύτερο και το ένα τρίτο. Η πέμπτη και η έκτη διαφορά είναι το ένα τρίτο και το ένα τέταρτο. Και κατά έναν όμοιο τρόπο τα υπόλοιπα.

Αντίθετα, στη δεύτερη σειρά, οι διαφορές είναι ίσες ως προς την ποσότητα, αλλά άνισες κατ' όνομα. Γιατί των δύο πρώτων όρων 2 και 4, η διαφορά είναι 2, που είναι και διαφορά των 4 και 6. Αυτές οι διαφορές είναι ίσες ως προς την ποσότητα. Η διαφορά 2 όμως, αν και είναι το ολόκληρο του μικρότερου από τους πρώτους όρους, είναι μόνο το μισό του μικρότερου από τους δεύτερους όρους. Και αν και είναι το μισό του μεγαλύτερου από τους πρώτους όρους, είναι μόνο το ένα τρίτο του μεγαλύτερου από τους δεύτερους όρους. Ομοίως, η διαφορά ανάμεσα στους 6 και 9 και στους 9 και 12 είναι 3. Αλλά, αυτή η διαφορά είναι το ένα δεύτερο του μικρότερου από τους πρώτους όρους, αλλά το ένα τρίτο του μικρότερου από τους δεύτερους όρους. Είναι επίσης το ένα τρίτο του μεγαλύτερου από τους πρώτους, αλλά μόνο το ένα τέταρτο του μεγαλύτερου από τους δεύτερους όρους. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXII

Μια απόδειξη ότι τα τετράγωνα και οι κύβοι συμμετέχουν στη φύση της ομοιότητας.

Είναι ολοφάνερο ότι όλα τα τετράγωνα είναι συγγενή με τους περιττούς αριθμούς, επειδή σε οποιαδήποτε διάταξη, είτε αυτή των λόγων δύο προς ένα, είτε αυτή των λόγων τρία προς ένα, αρχίζοντας από τη μονάδα, βρίσκονται πάντοτε στη θέση ενός περιττού αριθμού σύμφωνα με τη φυσική ακο-

λουθία των αριθμών. Θα βρίσκονται επίσης στη θέση των περιττών αριθμών στη διάταξη των λόγων τέσσερα προς ένα, πέντε προς ένα κ.λπ., αν και δεν είναι αλήθεια ότι στις σειρές αυτές βρίσκονται μόνο σε τούτες τις θέσεις. Ας τοποθετήσουμε αριθμούς σε μια κανονική σειρά, πρώτα αυτούς που σχηματίζουν λόγο δύο προς ένα, μετά εκείνους που σχηματίζουν λόγο τρία προς ένα κ.λπ. όπως παρακάτω:

Θέση περιττών αριθμών	1		3		5		7	
Ακολουθία με λόγο δύο προς ένα	1	2	4	8	16	32	64	128
Ακολουθία με λόγο τρία προς ένα	1	3	9	27	81	243	729	2187
Ακολουθία με λόγο τέσσερα προς ένα	1	4	16	64	256	1024	4096	16384
Ακολουθία με λόγο πέντε προς ένα	1	5	25	125	625	3125	15625	78125
Ακολουθία με λόγο έξι προς ένα	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936

Εδώ, στην πρώτη και δεύτερη ακολουθία φαίνεται ότι όλοι οι τετράγωνοι βρίσκονται στις θέσεις των περιττών αριθμών. Έτσι, τα 4 και 9 βρίσκονται στη θέση του 3, τα 16 και 81 βρίσκονται στη θέση του 5 και τα 64 και 729 βρίσκονται στη θέση του 7. Το ίδιο παρατηρείται και για τα υπόλοιπα. Αλλά στην ακολουθία των αριθμών που σχηματίζουν λόγο τέσσερα προς ένα, οι αριθμοί που βρίσκονται στη δεύτερη και τέταρτη θέση (αυτές είναι θέσεις άρτιων αριθμών) δηλαδή τα 4 και 64, είναι ομοίως τετράγωνοι, όπως επίσης και οι αριθμοί που βρίσκονται στην τρίτη, πέμπτη, κ.λπ. θέση.

Οι κύβοι επίσης, μολονότι έχουν τρεις διαστάσεις, επειδή παράγονται από πολλαπλασιασμό ίσων αριθμών, συμμετέχουν σε μια αμετάβλητη ουσία και συνδέονται με την ομοιότητα, γιατί γεννιούνται από την ένωση περιττών, αλλά ποτέ από αυτή των άρτιων αριθμών. Διότι αν όλοι οι περιττοί αριθμοί τοποθετηθούν σε μια κανονική σειρά με αρχή τη μο-

νάδα, δηλαδή: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, η πρόσθεση αυτών θα σχηματίσει κύβους αριθμούς. Έτσι, εφόσον το 1 είναι ο πρώτος κύβος εν δυνάμει, αν οι δύο επόμενοι αριθμοί, δηλαδή οι 3 και 5, προστεθούν, το άθροισμα τους θα είναι ο δεύτερος κύβος, που είναι το 8. Επίσης, αν οι τρεις αριθμοί που έπονται αυτών προστεθούν, δηλαδή 7, 9, 11, το άθροισμα τους 27 θα είναι ο τρίτος κύβος. Και οι τέσσερις επόμενοι αριθμοί, 13, 15, 17, 19 θα παράγουν, όταν προστεθούν, τον τέταρτο κύβο, δηλαδή το 64. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXIII

Σχετικά με την αναλογικότητα ή αναλογία.

Αρκετά ειπώθηκαν σε σχέση με αυτά τα εξειδικευμένα ζητήματα. Απαιτείται τώρα να συζητήσουμε τα σχετικά με τις αναλογίες, εφόσον είναι αναγκαίο για τη γνώση του θεωρητικού μέρους της μουσικής, της αστρονομίας, της γεωμετρίας, καθώς και της φιλοσοφίας του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Αναλογικότητα, λοιπόν, είναι η αναγωγή δύο ή περισσότερων λόγων[3] σε ένα. Ή, σύμφωνα με έναν περισσότερο συνήθη ορισμό, είναι η όμοια σχέση δύο ή περισσότερων λόγων, αν και αυτοί δεν έχουν συσταθεί με τις ίδιες ποσότητες και διαφορές. Αλλά διαφορά είναι η ποσότητα μεταξύ αριθμών και λόγος είναι μια ορισμένη σχέση, σαν μια σύνδεση δύο όρων, η σύνθεση των οποίων παράγει εκείνο που είναι αναλογικό ή ανάλογο. Διότι η αναλογικότητα προκύπτει από την ένωση των λόγων. Και η ελάχιστη αναλογικότητα βρίσκεται σε τρεις όρους όπως οι 4, 2, 1. Γιατί όπως το 4 είναι προς το 2, έτσι είναι το 2 προς το 1· η αναλογικότητα συνίσταται από δύο λόγους, καθένας από τους οποίους είναι λόγος δυο προς ένα.

Η αναλογικότητα όμως μπορεί να αποτελείται από οποιονδήποτε αριθμό όρων μεγαλύτερο από τρεις. Έτσι,

στους τέσσερις όρους 8, 4, 2, 1, όπως είναι το 8 προς το 4, έτσι είναι το 4 προς το 2, και έτσι το 2 προς το 1· σε όλα αυτά, η αναλογικότητα συνίσταται από λόγους δυο προς ένα. Έτσι επίσης θα έχει η κατάσταση και στους πέντε όρους 16, 8, 4, 2, 1· και στους έξι όρους 32, 16, 8, 4, 2, 1, και ούτω καθεξής *επ' άπειρον.* Όταν ο ίδιος όρος έχει την ίδια σχέση με τους δύο όρους που είναι διατεταγμένοι εμπρός και πίσω από αυτόν, και κατά συνέπεια και με τους άλλους, η αναλογικότητα αυτή ονομάζεται συνεχής, όπως στα παραδείγματα που παρατέθηκαν παραπάνω. Αλλά, εάν ένας όρος αναφέρεται σε έναν αριθμό, και κάποιος άλλος σε ένα διαφορετικό αριθμό, η αναλογία αναγκαστικά θα πρέπει να ονομάζεται διαζευγμένη. Έτσι στους όρους 1, 2, 4, 8, όπως είναι το 2 προς το 1, έτσι είναι το 8 προς το 4, και αντιστρόφως, όπως είναι το 1 προς το 2, έτσι είναι το 4 προς το 8. Και εναλλάξ, όπως είναι το 4 προς το 1, έτσι είναι το 8 προς το 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXIV

Σχετικά με την αναλογικότητα που ήταν γνωστή στους αρχαίους και τις αναλογίες που οι μεταγενέστεροι έχουν προσθέσει. Σχετικά με την αριθμητική αναλογικότητα και τις ιδιότητες της.

Τα τρία μέσα που ήταν γνωστά στους πιο αρχαίους μαθηματικούς και που παρουσιάστηκαν στη φιλοσοφία του Πυθαγόρα, του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, είναι το αριθμητικό, το γεωμετρικό και το αρμονικό. Εκτός από αυτές τις σχέσεις αναλογιών, υπάρχουν άλλες τρεις χωρίς όμως την κατάλληλη ονομασία. Αυτές ονομάζονται τέταρτη, πέμπτη και έκτη και είναι αντίθετες προς εκείνες που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Ωστόσο οι μεταγενέστεροι του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη φιλόσοφοι, λόγω της κατά τον Πυθαγόρα τελειότη-

τας της δεκάδας, πρόσθεσαν άλλες τέσσερις διάμεσες σχέσεις αναλογιών με τις οποίες μπορεί να σχηματιστεί μια δεκάδα. Είναι γεγονός πως σύμφωνα με αυτόν τον αριθμό οι έως τώρα αναλυθείσες πέντε σχέσεις και συγκρίσεις περιγράφονται· όπου στις πέντε μεγαλύτερες αναλογίες, που έχουμε ονομάσει ηγέτες, προσαρμόσαμε άλλους πέντε ελάσσονες όρους που ονομάσαμε ακόλουθους. Είναι φανερό ότι στην περιγραφή των δέκα κατηγοριών από τον Αριστοτέλη, και προγενέστερα αυτού από τον Αρχύτα (αν και ορισμένοι αμφισβητούν το γεγονός ότι οι κατηγορίες αυτές επινοήθηκαν από τον Αρχύτα) βρίσκεται η Πυθαγορική δεκάδα.

Ας κατευθύνουμε όμως τώρα την προσοχή μας στις αναλογικότητες και τους μέσους όρους. Αρχικά, ας συζητήσουμε για εκείνο το μέσο που διατηρεί τις σχέσεις των όρων σύμφωνα με την ισότητα της ποσότητας, αρνούμενο την ομοιότητα του λόγου. Τούτος ο μέσος είναι γνωστός σε σχέση με αυτές τις ποσότητες, οι οποίες έχουν μεταξύ τους ίση διαφορά όρων. Ποια όμως είναι η διαφορά των όρων, έχει οριστεί προηγουμένως. Και το ότι ο μέσος αυτός είναι αριθμητικός θα φανεί από τον ίδιο το λόγο των αριθμών, επειδή η αναλογία του συνίσταται στην ποσότητα των αριθμών. Γιατί λοιπόν η αριθμητική σχέση προηγείται όλων των άλλων αναλογιών; Κατ' αρχάς, επειδή η ακολουθία των φυσικών αριθμών, στην οποία υπάρχει η ίδια διαφορά όρων, συμπεριλαμβάνει αυτόν το μέσο. Διότι οι όροι διαφέρουν μεταξύ τους κατά τη μονάδα, από την αναπαραγωγική ικανότητα της οποίας αποκαλύπτεται πρώτα η φύση του αριθμού. Κατά δεύτερον, επειδή, όπως παρατηρήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο του πρώτου βιβλίου, η αριθμητική προηγείται και της γεωμετρίας και της μουσικής. Οι δύο τελευταίες καθιερώνουν από κοινού την προηγούμενη και όταν ανατρέπεται η πρώτη, ανατρέπονται και οι δυο επόμενες. Ενδείκνυται λοιπόν η συζήτηση να αρχίσει από εκείνον το μέσο που έχει σχέση μόνο με τη διαφορά των αριθμών.

Συνεπώς, αριθμητικός μέσος ονομάζεται εκείνος ο οποίος, δοθέντων τριών ή περισσότερων όρων, διαφέρει το ίδιο από όλους αυτούς. Σε αυτόν, έχοντας αγνοηθεί η ταυτό-

τητα του λόγου, εξετάζεται μόνο η διαφορά των όρων. Έτσι, στην ακολουθία των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, οι διαφορές είναι ίσες, αλλά δεν υπάρχει ο ίδιος λόγος και σχέση. Αν, επομένως, δοθούν τρεις όροι, η αναλογικότητα λέγεται ότι είναι συνεχής. Αλλά, αν υπάρχουν τέσσερις ή περισσότεροι όροι, ο μέσος ονομάζεται διαζευγμένος. Ανεξάρτητα όμως από τον αριθμό των όρων, η διαφορά μεταξύ τους θα είναι πάντα η ίδια και μόνο οι λόγοι θα αλλάζουν. Έτσι, οι διαφορές των όρων 1, 2, 3 είναι ίδιες, αλλά οι λόγοι είναι διαφορετικοί. Γιατί το 2 είναι διπλάσιο προς το 1, αλλά το 3 συνδέεται με το 2 με ημιόλιο λόγο. Το ίδιο πράγμα θα ισχύει και στους άλλους όρους.

Εάν παραλειφθεί ίσος αριθμός όρων, πάλι οι διαφορές θα είναι ίσες, αλλά οι λόγοι διαφορετικοί. Έτσι, αν παραλειφθεί ένας όρος, η διαφορά θα είναι 2, εφόσον τότε οι όροι θα είναι οι 1,3,5, που η διαφορά ανάμεσα τους είναι 2. Αλλά ο λόγος του 3 προς το 1 είναι πολύ διαφορετικός από αυτόν του 5 προς το 3. Αν παραλειφθούν δύο όροι, η διαφορά θα είναι 4 και το ίδιο και για τους υπόλοιπους, τόσο σε συνεχείς όσο και σε διαζευγμένες αναλογίες. Αλλά η ποιότητα του λόγου δε θα είναι η ίδια, αν και οι όροι θα έχουν μοιραστεί με ίσες διαφορές. Αν, αντιθέτως, υπάρχει ίδια ποιότητα λόγου, αλλά όχι ίδιες διαφορές, η αναλογία ονομάζεται γεωμετρική και όχι αριθμητική.

Χαρακτηριστικό αυτού του μέσου είναι ότι σε τρεις όρους, το άθροισμα των άκρων είναι διπλάσιο από το μέσο· όπως στους 1, 2, 3, όπου $1+3=4=2\times2$. Αν υπάρχουν τέσσερις όροι, το άθροισμα των άκρων ισούται με το άθροισμα των δύο μέσων. Για του όρους 1, 2, 3, 4, έχουμε $1+4=2+3$.

Η αναλογία αυτή εμφανίζει επίσης μια λεπτή ιδιότητα, την οποία κανείς από τους ειδήμονες στα μαθητικά δεν ανακάλυψε εκτός από το Νικόμαχο. Σε κάθε συνεχή διάταξη όρων, το ορθογώνιο που ορίζεται από τους άκρους είναι τόσο μικρότερο από το τετράγωνο του μέσου, όσο το γινόμενο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των δύο διαφορών. Για παράδειγμα, στους τρεις όρους, 3, 5, 7 το ορθογώνιο των άκρων είναι $3\times7=21$ και το τετράγωνο του μέσου είναι

5x5=25. Το 21 είναι μικρότερο του 25 κατά 4, το οποίο ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στο 3 και το 5, πολλαπλασιαζόμενη με τη διαφορά ανάμεσα στο 5 και το 7, δηλαδή ισούται με 2x2. Αν υπάρχουν τέσσερις όροι, το οριζόμενο από τους άκρους ορθογώνιο είναι τόσο μικρότερο από το ορθογώνιο που ορίζεται από τους μέσους, όσο το γινόμενο που προκύπτει από τη διαφορά του μεγαλύτερου όρου από έναν μέσο, πολλαπλασιαζόμενη επί τη διαφορά ανάμεσα στον ίδιο μέσο και το μικρότερο όρο. Για παράδειγμα, στους τέσσερις όρους 12, 10, 4, 2, είναι 12x2 = 24 και 10x4 = 40 και το 24 είναι μικρότερο του 40 κατά 16, το οποίο ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στο 12 και το 10, δηλαδή το 2, πολλαπλασιαζόμενη με τη διαφορά ανάμεσα στο 10 και το 2, δηλαδή το 8, οπότε 2 x 8 = 16. Αυτό ισούται επίσης με τη διαφορά ανάμεσα στο 12 και το 4, δηλαδή το 8, πολλαπλασιαζόμενη με τη διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 2, δηλαδή το 2.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που παρουσιάζει αυτή η αναλογία, γνωστό στους προγενέστερους του Νικόμαχου, είναι ότι στους μικρότερους όρους η αναλογία είναι κατ' ανάγκη μεγαλύτερη από αυτή των μεγαλύτερων όρων. Έτσι στους αριθμούς 1, 2, 3, ο λόγος των μικρότερων όρων, δηλαδή του 2 προς το 1, είναι δύο προς ένα, ενώ ο λόγος των μεγαλύτερων όρων, δηλαδή του 3 προς το 2, είναι ημιόλιος. Και ο λόγος δύο προς ένα είναι μεγαλύτερος από τον ημιόλιο. Ομοίως, σε τέσσερις όρους 12, 10, 8, 6, ο λόγος του 8 προς το 6 είναι μεγαλύτερος από το λόγο του 12 προς το 10. Διότι ο λόγος του 12 προς το 10 είναι επίπεμπτος, αλλά εκείνος του 8 προς το 6 είναι επίτριτος. Αντίθετα, στην αρμονική αναλογία στους μικρότερους όρους ο λόγος είναι μικρότερος και στους μεγαλύτερους μεγαλύτερος, όπως θα δειχθεί στη συνέχεια. Αλλά σε αυτούς τους μέσους, δηλαδή τον αριθμητικό και τον αρμονικό, η γεωμετρική αναλογία είναι ο διάμεσος, εφόσον αυτή διατηρεί τόσο στους μεγαλύτερους όσο και στους μικρότερους όρους μιαν ισότητα λόγου. Και η ισότητα είναι το μέσο ανάμεσα στο μεγαλύτερο και το μικρότερο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXV

Σχετικά με το γεωμετρικό μέσο και τις ιδιότητες του.

Είναι τώρα απαραίτητο να συζητήσουμε για το γεωμετρικό μέσο που έπεται του αριθμητικού. Αυτός μόνο ή κυρίως μπορεί να ονομαστεί αναλογικότητα ή αναλογία, καθώς, τόσο στους μεγαλύτερους όσο και στους μικρότερους όρους από τους οποίους αποτελείται, υπάρχει ο ίδιος λόγος. Σε αυτόν διατηρείται πάντοτε ο ίδιος λόγος και αντίθετα με τον αριθμητικό μέσο δε λαμβάνεται υπόψη η ποσότητα του αριθμού. Για παράδειγμα στην ακολουθία των αριθμών που σχηματίζουν λόγο δυο προς ένα 1, 2, 4, 8, 16, 32, κ.λπ., ή τρία προς ένα 1, 3, 9, 27, 81, κ.λπ., ή σε οποιαδήποτε άλλη, ο προηγούμενος προς τον επόμενο αριθμό θα συνδέεται πάντοτε με τον ίδιο λόγο που συνδέεται ο αμέσως επόμενος προς εκείνον που έπεται στη σειρά. Αν δηλαδή υπάρχουν τρεις όροι 2, 4, 8, θα είναι 2:4=4:8, και αντιστρόφως 8:4=4:2. Σε τέσσερις όρους 2, 4, 8, 16, θα είναι 2:4=8:16, και αντίστροφα 16:8=4:2. Κατά τον ίδιο τρόπο όλοι οι υπόλοιποι.

Το χαρακτηριστικό αυτού του μέσου είναι ότι σε κάθε διάταξη των όρων, οι διαφορές συνδέονται με τον ίδιο λόγο που συνδέονται οι όροι των οποίων αποτελούν διαφορές. Αν οι όροι έχουν λόγο δύο προς ένα, τότε και οι διαφορές θα έχουν λόγο δύο προς ένα· αν οι όροι έχουν λόγο τρία προς ένα, οι διαφορές επίσης θα έχουν λόγο τρία προς ένα· αν έχουν λόγο τέσσερα προς ένα, οι διαφορές ομοίως θα έχουν λόγο τέσσερα προς ένα. Οποιοδήποτε και αν είναι το πολλαπλάσιο των όρων, θα υπάρχει πάντοτε το ίδιο πολλαπλάσιο στις διαφορές, όπως γίνεται φανερό από την εξέταση των ακόλουθων πινάκων:

Διπλάσιες διαφορές

1	2	4	8	16	32	64	128
1	2	4	8	16	32	64	128

Διπλάσιοι όροι

Τριπλάσιες διαφορές

	2	6	18	54	162	486	1458
1	3	9	27	81	243	729	2187

Τριπλάσιοι όροι

Τετραπλάσιες διαφορές

	3	12	48	192	768	3072	12288
1	4	16	64	256	1024	4096	16384

Τετραπλάσιοι όροι

Ο γεωμετρικός μέσος παρουσιάζει επίσης άλλο ένα χαρακτηριστικό. Όπου οι λόγοι είναι δύο προς ένα, κάθε μεγαλύτερος όρος συγκρινόμενος με το μικρότερο έχει αυτόν το μικρότερο όρο για διαφορά του. Έτσι το 2 συγκρινόμενο με το 1, διαφέρει από αυτό κατά 1. Το 4 συγκρινόμενο με το 2, διαφέρει από αυτό κατά 2. Το 8 συγκρινόμενο με το 4, διαφέρει από αυτό κατά 4. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους. Εάν όμως οι λόγοι είναι τρία προς ένα, ο μεγαλύτερος όρος διαφέρει από το μικρότερο κατά το διπλάσιο του μικρότερου όρου. Έτσι το 3 διαφέρει από το 1 κατά 2, το διπλάσιο του 1. Το 9 διαφέρει από το 3 κατά 6, το διπλάσιο του 3. Το 27 διαφέρει από το 9 κατά 18, το διπλάσιο του 9. Σε όλους τους υπόλοιπους θα βρεθεί η ίδια ιδιότητα. Αν επίσης οι λόγοι είναι τέσσερα προς ένα, ο μεγαλύτερος όρος θα διαφέρει από το μικρότερο κατά το τριπλάσιο του μικρότερου όρου. Έτσι το 4 διαφέρει από το 1 κατά 3, το τριπλάσιο του 1. Το 16 διαφέρει από το 4 κατά 12, το τριπλάσιο του 4. Το 64 διαφέρει από το 16 κατά 48, το τριπλάσιο του 16. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους. Ομοίως, αν οι λόγοι είναι πέντε προς ένα, έξι προς ένα, κ.λπ., ο μεγαλύτερος όρος θα διαφέρει από το μικρότερο κατά την ποσότητα του λόγου μικρότερη κατά τη μονάδα.

Στη συνεχή γεωμετρική αναλογία, επίσης, το ορθογώνιο που ορίζεται από τους άκρους ισούται με το τετράγωνο των μέσων. Για παράδειγμα, στους τρεις όρους 2, 4, 8, που βρίσκονται σε γεωμετρική αναλογία έχουμε, $2 \times 8 = 4 \times 4 = 16$. Η

ίδια ιδιότητα ισχύει για οποιονδήποτε περιττό αριθμό όρων. Για παράδειγμα, στους πέντε όρους 16, 8, 4, 2, 1, το οριζόμενο από τους άκρους ορθογώνιο, δηλαδή 16 x 1 ισούται με το τετράγωνο του μέσου όρου 4. Ομοίως, στους επτά όρους 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, το 64 χ 1 = 8 χ 8. Αλλά όπου οι όροι δεν είναι συνεχείς, το ορθογώνιο που ορίζεται από τους άκρους ισούται με το ορθογώνιο που ορίζουν οι μέσοι, όπως γίνεται φανερό στους όρους 2, 4, 8, 16· γιατί 2 x 16 = 4 χ 8 — 32. Αυτό ισχύει πάντα όταν ο αριθμός των όρων είναι άρτιος. Έτσι στους έξι όρους 2, 4, 8, 16, 32, 64, παρατηρούμε την εξής σχέση: 2 x 64 = 128 = 4 χ 32 = 8 χ 16.

Μια άλλη ιδιότητα αυτού του μέσου είναι ότι υπάρχει πάντοτε ίσος λόγος τόσο στους μεγαλύτερους όσο και στους μικρότερους όρους. Ως εκ τούτου με όλους τους όρους 2, 4, 8, 16, 32, 64, σχηματίζεται λόγος δύο προς ένα. Ομοίως στους όρους 3, 9, 27, 81, 243, 729, ο λόγος είναι τρία προς ένα. Και κατά παρόμοιο τρόπο ισχύει και στους υπόλοιπους.

Τέλος, είναι χαρακτηριστικό σε αυτόν το μέσο ότι αν τετράγωνοι και ετερομήκεις αριθμοί διαταχθούν εναλλάξ, θα προχωρούν από το πρώτο πολλαπλάσιο σε όλες τις σχέσεις επιμόριων λόγων, όπως γίνεται φανερό από τον παρακάτω πίνακα:

Τετράγωνοι και ετερομήκεις διατεταγμένοι εναλλάξ

1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	37
Διπλάσιος	Διπλάσιος	Ημιόλιος	Ημιόλιος	Επίτριτος	Επίτριτος	Επιτέταρτος	Επιτέταρτος	Επίπεμπτος	Επίπεμπτος	

Βάσει αυτών, ο αριθμητικός μέσος συγκρίνεται με την ολιγαρχία, ή την πολιτεία που κυβερνάται από λίγους, οι οποίοι επιδιώκουν το δικό τους καλό και όχι αυτό της πολιτείας, γιατί στους μικρότερους όρους του υπάρχει μεγαλύτερος λόγος. Ο αρμονικός μέσος λέγεται ότι αντιστοιχεί στην αριστοκρατία, επειδή υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μεγαλύτερους όρους. Και ο γεωμετρικός μέσος είναι ανάλογος προς μια λαϊκή κυβέρνηση, όπου τόσο ο φτωχός όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση, επειδή σε

αυτόν υπάρχει μια ισότητα λόγου τόσο στους μεγαλύτερους όσο και στους μικρότερους όρους[4].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXVI

Οι επίπεδοι αριθμοί συνδέονται με ένα μόνο μέσο, ενώ οι στερεοί αριθμοί με δύο μέσους.

Είναι όμως καιρός τώρα να αναφερθούμε σε κάποια πράγματα χρήσιμα για τη γνώση της συγκρότησης του κόσμου, όπως παραδίδεται στον *Τίμαιο* του Πλάτωνα, αλλά δεν είναι φανερή στον καθένα. Όλα τα επίπεδα σχήματα ενώνονται με ένα μόνο γεωμετρικό μέσο. Επομένως σε αυτά υπάρχουν μονάχα δύο διαστήματα, από τον πρώτο στο μεσαίο και από το μεσαίο στον τελευταίο όρο. Οι κύβοι όμως έχουν δύο μέσους, σύμφωνα με μια γεωμετρική αναλογία· από εκεί επίσης τα στερεά σχήματα λέγεται ότι έχουν τρία διαστήματα. Γιατί υπάρχει ένα διάστημα από τον πρώτο στο δεύτερο, άλλο ένα από το δεύτερο στον τρίτο και άλλο ένα από τον τρίτο στον τέταρτο, που είναι το τελευταίο διάστημα. Τα επίπεδα σχήματα, επομένως, πολύ σωστά λέγεται ότι περιέχονται σε δύο, ενώ τα στερεά σε τρεις διαστάσεις. Ας πάρουμε δυο τετράγωνους, λοιπόν, το 4 και το 9. Σε αυτούς ένας μόνο μέσος υπάρχει που συγκροτεί τον ίδιο λόγο. Ο μέσος αυτός είναι το 6, γιατί το 6 είναι ημιόλιος προς το 4 και το 9 είναι ημιόλιος προς το 6. Αυτό όμως συμβαίνει επειδή η πλευρά του ενός τετράγωνου, πολλαπλασιαζόμενη με την πλευρά του άλλου, παράγει το μέσο όρο 6. Δηλαδή η πλευρά του 4 είναι το 2, του 9 είναι το 3, αυτά πολλαπλασιαζόμενα μεταξύ τους παράγουν το 6. Συνεπώς για να βρούμε το μέσο δυο τετραγώνων, πρέπει να πολλαπλασιαστούν οι πλευρές τους. Το γινόμενο θα είναι ο ζητούμενος μέσος. Αλλά αν δοθούν δύο κύβοι, όπως το 8 και το 27, δύο μονάχα μέσοι υπάρχουν μεταξύ τους με τον ίδιο λόγο, δηλαδή οι 12

και 18. Γιατί το 12 προς το 8 και το 18 προς το 27 συνδέονται μόνο με ημιόλιο λόγο.

Οι δυο αυτοί μέσοι βρίσκονται και με τον ακόλουθο τρόπο. Αν η πλευρά του μεγαλύτερου κύβου πολλαπλασιαστεί με την πλευρά του μικρότερου και κατόπιν το γινόμενο πολλαπλασιαστεί με τη μικρότερη, θα βρεθεί ο μικρότερος από τους δυο μέσους. Αν πάλι το τετράγωνο της πλευράς του μεγαλύτερου κύβου πολλαπλασιαστεί με την πλευρά του μικρότερου κύβου, το γινόμενο θα είναι ο μεγαλύτερος μέσος. Παίρνουμε για παράδειγμα τους δύο κύβους 8 και 27. Η πλευρά του μεγαλύτερου κύβου είναι 3 και η πλευρά του μικρότερου είναι 2· οπότε 3 x 2 x 2 = 12, που είναι ο μικρότερος μέσος και 3 x 3 x 2 = 18, ο μεγαλύτερος μέσος. Ομοίως στους κύβους 27 και 64. Η πλευρά του μεγαλύτερου κύβου είναι 4 και η πλευρά του μικρότερου είναι 3· συνεπώς ο μικρότερος μέσος είναι 4 x 3 x 3 = 36, ενώ ο μεγαλύτερος είναι 4 x 4 x 3 = 48. Άρα ο μικρότερος μέσος αντλεί δύο πλευρές από το μικρότερο κύβο και μία πλευρά από το μεγαλύτερο κύβο. Αντίστοιχα, ο μεγαλύτερος μέσος αντλεί δύο πλευρές από το μεγαλύτερο κύβο και μία πλευρά από το μικρότερο κύβο. Δηλαδή το 12, ο μικρότερος μέσος ανάμεσα στους κύβους 8 και 27, έχει δύο πλευρές από το 8 και μία πλευρά από το 27, επειδή 2 x 2 x 3 = 12. Και το 18, ο μεγαλύτερος μέσος, έχει δύο πλευρές από το 27 και μία πλευρά από το 8, επειδή 3 x 3 χ 2 = 18.

Είναι επίσης σε όλους γνωστό ότι αν ένας τετράγωνος πολλαπλασιαστεί με έναν τετράγωνο, το γινόμενο θα είναι τετράγωνος[5]. Αλλά αν ένας *ετερομήκης* αριθμός πολλαπλασιαστεί με έναν τετράγωνο, ή αντίστροφα, θα παραχθεί ένας προμήκης αριθμός[6]. Αν ένας κύβος πολλαπλασιαστεί με έναν κύβο, το γινόμενο θα είναι κύβος[7], αλλά αν πολλαπλασιαστεί ένας ετερομήκης με έναν κύβο, ή αντίστροφα, το γινόμενο ποτέ δε θα είναι κύβος[8]. Αυτό οφείλεται σε μια ομοιότητα προς τους άρτιους και τους περιττούς. Διότι αν ένας άρτιος πολλαπλασιαστεί με έναν άρτιο, το γινόμενο θα είναι πάντοτε άρτιος αριθμός[9]. Και αν ένας περιττός πολλαπλασιαστεί

με έναν περιττό αριθμό, περιττός αριθμός θα παραχθεί αμέσως[10]. Αλλά αν ένας περιττός πολλαπλασιαστεί με έναν άρτιο, ή ένας άρτιος με έναν περιττό, το γινόμενο θα είναι πάντα άρτιος[11]. Αυτό όμως θα γίνει πιο εύκολα κατανοητό, αν ανατρέξουμε στο απόσπασμα του όγδοου βιβλίου της *Πολιτείας* του Πλάτωνα, στο οποίο οι Μούσες παρουσιάζονται από το φιλόσοφο να μιλούν για το γεωμετρικό αριθμό, που είναι η πηγή των καλύτερων και χειρότερων γενεών και που θα εξηγηθεί στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXVII

Σχετικά με τον αρμονικό μέσο και τις ιδιότητές του.

Ο αρμονικός μέσος δε συντίθεται ούτε από ίδιες διαφορές, ούτε από ίσους λόγους. Σε αυτόν, όμως, ο λόγος του μεγαλύτερου όρου προς το μικρότερο είναι ίδιος με το λόγο της διαφοράς του μεγαλύτερου από το μέσο προς τη διαφορά του μέσου από το μικρότερο όρο. Στους αριθμούς 3, 4, 6 και 2, 3, 6, όπως είναι ο λόγος του 6 προς το 3, έτσι είναι η διαφορά ανάμεσα στο 6 και το 4, δηλαδή του 2, προς τη διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 3, δηλαδή το 1. Και όπως είναι ο λόγος του 6 προς το 2, έτσι είναι ο λόγος της διαφοράς ανάμεσα στο 6 και το 3, δηλαδή του 3, προς τη διαφορά ανάμεσα στο 3 και το 2, δηλαδή το 1. Συνεπώς, στο μέσο αυτό δεν υπάρχουν ούτε ο ίδιος λόγος όρων ούτε οι ίδιες διαφορές.

Παρουσιάζει όμως ένα χαρακτηριστικό εν αντιθέσει προς τον αριθμητικό μέσο. Σε εκείνον υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μικρότερους όρους και μικρότερος λόγος στους μεγαλύτερους. Αντίθετα, στον αρμονικό μέσο υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μεγαλύτερους και μικρότερος στους μικρότερους όρους. Δηλαδή, στους όρους 3, 4, 6, αν το 4 συγκριθεί με το 3, ο λόγος είναι επίτριτος, αλλά αν το 6 συγκριθεί με το 4, ο λόγος είναι ημιόλιος. Αλλά ο ημιόλιος λόγος είναι

τόσο μεγαλύτερος από τον επίτριτο, όσο το 1:2 είναι μεγαλύτερο από το 1:3. Πολύ ορθά, επομένως, υποστηρίζεται ότι η γεωμετρική αναλογία αποτελεί ένα μέσο ανάμεσα σε εκείνη την αναλογία όπου υπάρχει μικρότερος λόγος στους μεγαλύτερους όρους και μεγαλύτερος στους μικρότερους και σε εκείνη όπου υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μεγαλύτερους και μικρότερος στους μικρότερους όρους. Αυτή είναι αληθινή αναλογικότητα ή αναλογία, η οποία -κατέχοντας τη θέση ενός μέσου- έχει ίσους λόγους τόσο στους μεγαλύτερους όσο και στους μικρότερους όρους.

Τούτο είναι επίσης ένα σημάδι ότι η γεωμετρική αναλογία είναι ένας μέσος, κατά μια άποψη, ανάμεσα σε δυο άκρους. Στην αριθμητική αναλογία ο μέσος όρος έπεται του μικρότερου και έχει για επόμενο το μεγαλύτερο κατά το ίδιο μέρος του εαυτού του, αλλά κατά ένα μέρος ως προς το μικρότερο και κατά ένα διαφορετικό μέρος ως προς το μεγαλύτερο όρο. Έτσι στους τρεις όρους 2, 3, 4, ο όρος 3 έπεται του 2, κατά το ένα τρίτο του εαυτού του, δηλαδή κατά 1, και το 4 τον υπερβαίνει κατά το ίδιο μέρος του εαυτού του, δηλαδή κατά το ένα τρίτο. Αλλά το 3 δεν υπερβαίνει το 2 κατά το ίδιο μέρος του 2, ούτε υπερβαίνεται από το 4 κατά το ίδιο μέρος του 4. Διότι το 3 υπερβαίνει το 2 κατά 1, που είναι το μισό του 2, αλλά υπερβαίνεται από το 4 κατά 1, που είναι το ένα τέταρτο του 4. Στον αρμονικό μέσο οι λόγοι έχουν έναν αντίθετο τρόπο ύπαρξης. Διότι ο μέσος όρος στο λόγο αυτό δεν υπερβαίνει το μικρότερο, ούτε υπερβαίνεται από το μεγαλύτερο κατά το ίδιο μέρος του εαυτού του, αλλά αυτός υπερβαίνει το μικρότερο κατά το ίδιο μέρος του μικρότερου, όσο είναι εκείνο το μέρος του μεγαλύτερου κατά το οποίο ο ίδιος υπερβαίνεται. Έτσι στην αρμονική διάταξη 2, 3, 6, ο όρος 3 υπερβαίνει το 2 κατά το μισό του 2, ενώ υπερβαίνεται από το 6 κατά 3, που είναι το μισό του 6. Αντίθετα, στη γεωμετρική αναλογία ο μέσος ούτε υπερβαίνει το μικρότερο όρο, ούτε υπερβαίνεται από το μεγαλύτερο όρο κατά το ίδιο μέρος του εαυτού του, ούτε πάλι υπερβαίνει το μικρότερο όρο κατά το ίδιο μέρος του μικρότερου, ούτε υπερβαίνεται από το μεγαλύτερο κατά το ίδιο μέρος του μεγαλύτερου. Κα-

τά εκείνο το μέρος του εαυτού του με το οποίο ο μέσος υπερβαίνει το μικρότερο όρο, κατά το ίδιο μέρος του εαυτού του ο μεγαλύτερος υπερβαίνει το μέσο όρο. Έτσι, στους τρεις όρους 4, 6, 9, ο μέσος όρος 6 υπερβαίνει το 4 κατά το ένα τρίτο του εαυτού του, και το 9 επίσης υπερβαίνει το 6 κατά το ένα τρίτο του εαυτού του. Η αρμονική αναλογία έχει άλλη μία ιδιότητα. Αν οι δύο άκροι προστεθούν και πολλαπλασιαστούν με το μέσο, το γινόμενο θα είναι διπλάσιο από εκείνο των άκρων πολλαπλασιαζόμενων μεταξύ τους. Έτσι στους όρους 3, 4, 6, έχουμε 3+6=9 και 9x4 = 36, που είναι το διπλάσιο του 3x6. Επίσης, στους όρους 2, 3, 6, έχουμε 2 + 6 = 8 και 8 x 3 = 24, το διπλάσιο του 2 x 6 = 12.

Στην αρμονική αναλογικότητα επίσης το άθροισμα των άκρων είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το διπλάσιο του μέσου όρου. Έτσι στους προαναφερθέντες αριθμούς βλέπουμε ότι 6+3 είναι μεγαλύτερο από 4x2, καθώς και 6+2 είναι μεγαλύτερο από 3x2. Επίσης, το γινόμενο των άκρων είναι τόσο μεγαλύτερο από το τετράγωνο του μέσου όρου, όσο το γινόμενο που προκύπτει από τη διαφορά ανάμεσα στον ένα άκρο και το μέσο πολλαπλασιαζόμενη με τη διαφορά ανάμεσα στο μέσο και τον άλλο άκρο. Έτσι 3x6 = 18, το οποίο είναι μεγαλύτερο του 16, του τετράγωνου του μέσου όρου 4, κατά 2. Και το 2 ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στο 6 και το 4 πολλαπλασιαζόμενη με τη διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 3. Ομοίως 2x6 υπερβαίνει το 9, το τετράγωνο του 3, κατά 3. Και το 3 ισούται με τη διαφορά ανάμεσα στο 6 και το 3 πολλαπλασιαζόμενη με τη διαφορά ανάμεσα στο 3 και το 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXVIII

Γιατί αυτός ο μέσος ονομάζεται αρμονικός. Σχετικά με τη γεωμετρική αρμονία.

Ο λόγος, όμως, για τον οποίο αυτός ο μέσος ονομάζεται αρμονικός είναι ο εξής. Μία αριθμητική διάταξη όρων δια-

χωρίζει τις ποσότητες μονάχα κατά ίσες διαφορές, ενώ μία γεωμετρική διάταξη συνδέει τους όρους με έναν ίσο λόγο. Η αρμονική όμως διάταξη, καθώς έχει πολύ μεγαλύτερη σχέση με την αναλογία από όσο οι άλλοι μέσοι, δεν εξετάζει το λόγο ούτε μόνο σε σχέση με τους όρους, ούτε μόνο σε σχέση με τις διαφορές, αλλά ενδιαφέρεται και για τα δύο το ίδιο. Διότι αυτή δείχνει ότι όπως είναι ο λόγος των άκρων μεταξύ τους, τέτοιος είναι και ο λόγος της διαφοράς ανάμεσα στο μεγαλύτερο και το μέσο προς τη διαφορά ανάμεσα στο μέσο και τον τελευταίο όρο. Αλλά ότι η εξέταση του σχετικού είναι ίδιον της αρμονίας, έχει αποδειχθεί από εμάς προηγουμένως.

Οι αναλογίες επίσης των μουσικών συγχορδιών που ονομάζονται συμφωνίες, βρίσκονται μόνο σε αυτόν το μέσο. Διότι η δια τεσσάρων συμφωνία, που είναι η θεμελιώδης, και κατά κάποιον τρόπο κατέχει τη δύναμη ενός στοιχείου σε σχέση προς τις άλλες συμφωνίες, όντας δομημένη με έναν επίτριτο λόγο, δηλαδή με αυτόν του 4 προς 3, βρίσκεται σε αρμονικούς μέσους αυτού του είδους. Ας πάρουμε όρους της αρμονικής αναλογίας τέτοιους που οι άκροι συνδέονται με λόγο δύο προς ένα. Ας πάρουμε επίσης άλλους όρους των οποίων οι άκροι βρίσκονται σε λόγο τρία προς ένα, δηλαδή

3, 4, 6 και 2, 3, 6.

Στην πρώτη διάταξη λοιπόν, το 6 είναι διπλάσιο του 3, ενώ στη δεύτερη τριπλάσιο του 2. Τότε, αν οι δυο διαφορές συγκριθούν μεταξύ τους, θα παραχθεί ένας επίτριτος λόγος, από όπου σχηματίζεται η δια τεσσάρων συμφωνία. Γιατί η διαφορά ανάμεσα στο 6 και το 3 είναι 3 και ανάμεσα στο 6 και το 2 είναι 4 και το 4 συγκρινόμενο με το 3 παράγει έναν επίτριτο λόγο.

Στον ίδιο μέσο επίσης, η δια πέντε συμφωνία σχηματίζεται από τον ημιόλιο λόγο. Γιατί στην πρώτη από τις παραπάνω διατάξεις το 6 είναι ημιόλιος σε σχέση με το 4, και στη δεύτερη το 3 προς το 2. Από το καθένα από αυτά σχηματίζεται η δια πέντε συμφωνία. Εν συνεχεία, η συμφωνία δια πασών, που αποτελείται από ένα λόγο δύο προς ένα, σχηματί-

ζεται στην πρώτη από αυτές, δηλαδή στο λόγο του 6 προς το 3. Επίσης στη δεύτερη από τις διατάξεις, σχηματίζονται οι συμφωνίες δια πέντε και δια πασών, που διατηρούν έναν ημιόλιο και ένα λόγο δύο προς ένα αντίστοιχα. Από τους όρους 2, 3, 6, το 3 είναι προς το 2 δια πέντε και το 6 προς το 3 δια πασών. Επειδή οι άκροι στη διάταξη αυτή, που περιλαμβάνει δυο συμφωνίες, βρίσκονται σε λόγο τρία προς ένα, οι διαφορές επίσης των όρων έχουν τον ίδιο λόγο. Έτσι, η διαφορά ανάμεσα στο 3 και το 2 είναι 1 και ανάμεσα στο 6 και το 3 η διαφορά είναι 3. Αλλά στην πρώτη από αυτές τις διατάξεις, δηλαδή στα 3, 4, 6, ο μεγαλύτερος όρος 6 είναι τριπλάσιος από τη διαφορά μεταξύ αυτού και του μέσου όρου, δηλαδή είναι τριπλάσιο του 2. Και πάλι, ο μικρότερος όρος είναι επίσης τριπλάσιος από τη διαφορά μεταξύ αυτού και του μέσου όρου, δηλαδή είναι τριπλάσιο του 1. Ομοίως, η μεγαλύτερη συμφωνία, που ονομάζεται δις δια πασών, ή σαν να ήταν δυο φορές διπλάσιο, εφόσον η συμφωνία δια πασών συντίθεται από ένα λόγο δύο προς ένα, βρίσκεται σε αυτόν τον αρμονικό μέσο. Διότι στη διάταξη 3, 4, 6, ο μέσος όρος 4 είναι τετραπλάσιος του 1, της διαφοράς του δηλαδή από το μικρότερο όρο. Επίσης στη διάταξη 2, 3, 6, η διαφορά των άκρων 6 και 2 είναι τετραπλάσια της διαφοράς ανάμεσα στο μέσο και το μικρότερο όρο. Γιατί η πρώτη διαφορά είναι 4 και η δεύτερη είναι 1. Και ο λόγος 4 προς 1 σχηματίζει τη συμφωνία δις διαπασών.

Εν τούτοις, ορισμένοι ονομάζουν έναν τέτοιο μέσο αρμονικό, επειδή είναι συναφής με τη γεωμετρική αρμονία. Αυτοί ονομάζουν τον κύβο γεωμετρική αρμονία, επειδή η επέκταση του κατά μήκος, πλάτος και ύψος είναι τέτοια, που προχωρώντας από ίσα και φθάνοντας σε ίσα, το όλον αυξάνεται ίσα, έτσι ώστε να συμφωνεί με τον εαυτό του. Ο αρμονικός μέσος, όμως, είναι ορατός σε όλους τους κύβους που συνιστούν γεωμετρική αρμονία. Κάθε κύβος έχει 12 ακμές, ή ενωτικές γραμμές, οκτώ γωνίες και έξι επιφάνειες. Αυτή όμως η διάταξη είναι αρμονική, εφόσον τα 6, 8, 12, είναι σε αρμονική αναλογία. Διότι όπως είναι το 12 προς το 6, έτσι είναι η διαφορά ανάμεσα στο 12 και το 8 προς τη διαφορά

ανάμεσα στο 8 και το 6. Επιπροσθέτως, το 8 που είναι ένας μέσος, υπερβαίνει το μικρότερο όρο 6 κατά ένα μέρος του εαυτού του, ενώ ο μεγαλύτερος όρος υπερβαίνει τον ίδιο κατά ένα άλλο μέρος του εαυτού του. Υπερβαίνει δε το μικρότερο όρο κατά το ίδιο μέρος του μικρότερου, όπως είναι εκείνο το μέρος του μεγαλύτερου κατά το οποίο ο μεγαλύτερος τον υπερβαίνει[12]. Επίσης, αν οι άκροι προστεθούν και το άθροισμα τους πολλαπλασιαστεί με το μέσο όρο, το γινόμενο θα είναι διπλάσιο του γινομένου που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των άκρων μεταξύ τους. Διότι 12+6=18 και 18 x 18 = 144. Αλλά 144 είναι το διπλάσιο του 12 x 6 = 72.

Ομοίως μπορούν να βρεθούν στη διάταξη αυτή όλες οι μουσικές συμφωνίες. Η δια τεσσάρων συμφωνία, πράγματι, είναι ο λόγος του 8 προς το 6, επειδή είναι ένας επίτριτος λόγος. Η δια πέντε συμφωνία είναι ο λόγος του 12 προς το 8, επειδή ό,τι ονομάζεται ημιόλιος λόγος, βρίσκεται σε αυτή τη συμφωνία. Η δια πασών, η οποία παράγεται από ένα λόγο δυο προς ένα, βρίσκεται στο λόγο του 12 προς το 6. Αλλά η δια πασών και συγχρόνως η δια πέντε, η οποία βρίσκεται σε λόγο τρία προς ένα, προκύπτουν από μια σύγκριση της διαφοράς των άκρων με τη διαφορά ανάμεσα στο μέσο και το μικρότερο άκρο. Διότι η διαφορά ανάμεσα στο 8 και το 6 είναι 2 και το 6 είναι τριπλάσιο του 2. Και η μεγαλύτερη συμφωνία, που είναι η δις δια πασών και απαρτίζεται από λόγο τέσσερα προς ένα, είναι ορατή στη σύγκριση του 8 με τη διαφορά ανάμεσα στο 8 και το 6, δηλαδή στη σύγκριση του 8 με το 2. Επομένως, μια αναλογικότητα αυτού του είδους σωστά και κατάλληλα ονομάζεται αρμονικός μέσος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXIX

Σχετικά με το πώς ο αριθμητικός, ο γεωμετρικός και ο αρμονικός μέσος μπορούν εναλλακτικά να παρεμβάλλονται μεταξύ δύο ορισμένων άκρων όρων· η παραγωγή αυτών.

Οφείλουμε ωστόσο να δείξουμε ότι όπως σε ένα μουσικό αυλό οι ακραίες οπές χρησιμοποιούνται εναλλάξ με τη μεσαία οπή και ανοιγοκλείνοντας τις με τα δάχτυλα προκαλούμε την εκφορά διαφορετικών ήχων, ή όπως σε δυο τεντωμένες χορδές ο μουσικός προκαλεί έναν ενδιάμεσο ήχο, οξύ ή βαρύγδουπο, ανάλογα με το πόσο τις τεντώνει ή τις χαλαρώνει, κατά τον ίδιο τρόπο σε δυο δεδομένους αριθμούς μπορούμε να παρεμβάλλουμε άλλοτε έναν αριθμητικό, άλλοτε ένα γεωμετρικό και άλλοτε έναν αρμονικό μέσο. Μπορούμε όμως να αλλάξουμε αυτόν το μέσο, όταν τοποθετηθεί ανάμεσα σε δύο όρους που είναι είτε περιττοί είτε άρτιοι, έτσι ώστε όταν ο μέσος είναι αριθμητικός, μόνο ο λόγος και η ισομέρεια των διαφορών διατηρείται. Όταν όμως είναι γεωμετρικός, η συνένωση των λόγων παραμένει σταθερή, ενώ όταν υπάρχει μια αρμονική σύγκριση των διαφορών, δε θα είναι ασύμφωνη με το λόγο των όρων. Στην πρώτη περίπτωση λοιπόν, ας είναι άκροι οι άρτιοι αριθμοί 10 και 40, ανάμεσα στους οποίους είναι αναγκαίο να παρεμβάλλουμε όλους αυτούς τους μέσους. Αρχικά παρεμβάλλουμε ανάμεσα τους τον αριθμητικό μέσο, ο οποίος είναι το 25, γιατί τα 10, 25, και 40 βρίσκονται σε αριθμητική αναλογία. Κατόπιν, ανάμεσα στους 10 και 40 τοποθετούμε τον αριθμό 20, που είναι ο γεωμετρικός μέσος αυτών, εφόσον όπως είναι το 10 προς το 20, έτσι είναι το 20 προς το 40. Και τέλος, αν το 16 παρεμβληθεί ανάμεσα στους 10 και 40, θα παραχθεί ο αρμονικός μέσος, γιατί όπως είναι το 10 προς το 40, έτσι είναι η διαφορά ανάμεσα στο 16 και το 10, δηλαδή το 6, προς τη διαφορά ανάμεσα στο 40 και 16, δηλαδή το 24.

Άν περιττοί αριθμοί προταθούν ως άκροι, τέτοιοι όπως είναι το 5 και το 45, θα βρεθεί ότι το 25 θα συνιστά τον αριθμητικό, το 15 το γεωμετρικό και το 9 τον αρμονικό μέσο.

Είναι απαραίτητο όμως να δείξουμε πώς μπορούν να βρεθούν αυτοί οι μέσοι. Δοθέντων δύο όρων, ο αριθμητικός μέσος βρίσκεται εάν προστεθούν οι δυο άκροι και το άθροισμα τους διαιρεθεί με το 2. Το πηλίκο θα είναι ο αριθμητικός τους μέσος. Για παράδειγμα 10+40=50 και το 50:2=25. Αυτός επομένως είναι ο μέσος όρος, σύμφωνα με την αριθμητική αναλογία. Ή εάν η διαφορά του μεγαλύτερου από το μικρότερο όρο διαιρεθεί με το 2 και το πηλίκον προστεθεί στο μικρότερο όρο, το άθροισμα που προκύπτει θα είναι ο αριθμητικός μέσος που ζητείται. Έτσι η διαφορά ανάμεσα στο 40 και το 10 είναι το 30. Αν αυτό διαιρεθεί με το 2, το πηλίκο θα είναι 15, το οποίο αν προστεθεί στο 10, θα δώσει άθροισμα 25, που είναι ο αριθμητικός μέσος ανάμεσα στο 10 και το 40. Για να βρούμε το γεωμετρικό μέσο πρέπει οι δύο άκροι να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους και η τετραγωνική ρίζα του γινομένου θα είναι ο ζητούμενος μέσος. Έτσι, 10 χ 40 = 400 και η τετραγωνική ρίζα του 400 είναι το 20. Άρα, το 20 θα είναι ο γεωμετρικός μέσος ανάμεσα στο 10 και το 40. Ή εάν ο λόγος που οι δοθέντες όροι έχουν ο ένας προς τον άλλο, διαιρεθεί με το 2, το πηλίκο θα είναι ο ζητούμενος μέσος. Γιατί, το 40 προς το 10 είναι ένας λόγος τέσσερα προς ένα. Αν, λοιπόν, διαιρεθεί με το 2, θα γίνει δυο προς ένα, που είναι το 20, εφόσον το 20 είναι το διπλάσιο του 10. Το 20 επομένως θα είναι ο γεωμετρικός μέσος ανάμεσα στους δύο δεδομένους όρους. Για να βρεθεί τέλος ο αρμονικός μέσος, η διαφορά των όρων πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το μικρότερο όρο, το γινόμενο που προκύπτει πρέπει να διαιρεθεί με το άθροισμα των άκρων και τέλος, το πηλίκο πρέπει να προστεθεί στο μικρότερο όρο. Το άθροισμα θα είναι ο ζητούμενος μέσος. Έτσι η διαφορά ανάμεσα στο 40 και το 10 είναι το 30, 30 x 10 = 300 και το 300 διαιρούμενο με το 40+10=50 δίνει το πηλίκο 6 και 6+10=16, δηλαδή ο αρμονικός μέσος ανάμεσα στο 10 και το 40.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXX

Σχετικά με τους τρεις μέσους που είναι αντίθετοι προς τον αρμονικό και το γεωμετρικό μέσο.

Οι μέσοι τους οποίους έχουμε μέχρι τώρα παρουσιάσει, επινοήθηκαν και επικυρώθηκαν από τους αρχαιότερους μαθηματικούς. Αναφερθήκαμε σε αυτούς εκτενώς, επειδή βρίσκονται κυρίως στα *γραπτά* των αρχαίων και συντελούν ιδιαίτερα στην κατανόηση τους. Θα αναφέρουμε λοιπόν τους άλλους μέσους εν συντομία, γιατί δε συνεισφέρουν σε τίποτε άλλο παρά στην ολοκλήρωση της δυάδας. Οι μέσοι αυτοί φαίνονται να είναι αντίθετοι προς τους προηγούμενους, από τους οποίους όμως κατάγονται. Ο τέταρτος μέσος είναι εκείνος που είναι αντίθετος στον αρμονικό. Ήδη γνωρίζουμε ότι στον αρμονικό μέσο, όπως είναι ο μεγαλύτερος προς το μικρότερο όρο, έτσι είναι η διαφορά του μεγαλύτερου από το μέσο προς τη διαφορά του μέσου από το μικρότερο όρο, κάτι που βλέπουμε στους όρους 3, 4, 6. Αντίθετα στην τέταρτη αναλογικότητα, δεδομένων τριών όρων, όπως είναι ο μεγαλύτερος προς το μικρότερο, έτσι είναι η διαφορά του μέσου από το μικρότερο, προς τη διαφορά του μεγαλύτερου προς το μέσο όρο. Για παράδειγμα, παίρνουμε τα 3, 5, 6. Δηλαδή, όπως είναι το 6 προς το 3, έτσι είναι η διαφορά του 5 από το 3, δηλαδή το 2, προς τη διαφορά του 6 από το 5, δηλαδή το 1. Φαίνεται επομένως ότι αυτός ο μέσος είναι κατά κάποιον τρόπο αντίθετος στον αρμονικό μέσο. Διότι στον τελευταίο, όπως είναι ο μεγαλύτερος προς το μικρότερο όρο, έτσι είναι η διαφορά των μεγαλύτερων προς τη διαφορά των μικρότερων όρων αλλά στον τέταρτο μέσο, όπως είναι ο μεγαλύτερος προς το μικρότερο όρο, έτσι είναι η διαφορά των μικρότερων προς τη διαφορά των μεγαλύτερων όρων. Αποτελεί επίσης χαρακτηριστικό αυτού του μέσου ότι το ορθογώνιο που ορίζεται από το μεγαλύτερο και το μέσο όρο είναι διπλάσιο του οριζόμενου από το μέσο και το μικρότερο όρο ορθογώνιου. Έτσι $5 \times 6 = 30$, ενώ $3 \times 5 = 15$. Οι δυο άλ-

λες αναλογικότητες, δηλαδή η πέμπτη και η έκτη, είναι αντίθετες στη γεωμετρική αναλογικότητα και φαίνονται να αντιτάσσονται σε αυτήν.

Σύμφωνα με την πέμπτη αναλογία ισχύει το εξής. Σε τρεις όρους, όπως είναι ο μέσος προς το μικρότερο όρο, έτσι είναι η διαφορά τους προς τη διαφορά ανάμεσα στο μέσο και το μεγαλύτερο όρο· για παράδειγμα, οι όροι 2, 4, 5. Γιατί, όπως είναι το 4 προς το 2, έτσι είναι η διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 2, δηλαδή το 2, προς τη διαφορά ανάμεσα στο 5 και το 4, δηλαδή το 1. Αυτό όμως είναι αντίθετο στη γεωμετρική αναλογία, διότι σε αυτή, όπως είναι ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μέσο, και του μέσου προς το μικρότερο όρο, έτσι είναι η διαφορά του μεγαλύτερου προς τη διαφορά του μικρότερου όρου, όπως στους 8, 4, 2. Γιατί ο λόγος του 8 προς το 4 και του 4 προς το 2, είναι όμοιος με το λόγο του 8-4 προς το 4-2. Αλλά στην πέμπτη αναλογικότητα, όπως είναι ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο όρο, έτσι είναι ο λόγος της διαφοράς των μικρότερων προς τη διαφορά των μεγαλύτερων όρων. Χαρακτηριστικό επίσης αυτής της αναλογικότητας είναι ότι το οριζόμενο από το μεγαλύτερο όρο και το μέσο ορθογώνιο, είναι το διπλάσιο του ορθογώνιου που ορίζεται από τους δυο άκρους. Έτσι στους όρους 2, 4, 5, έχουμε $5 \times 4 = 20$ και 20 είναι το διπλάσιο του 5×2.

Η έκτη αναλογικότητα εμφανίζεται όταν, δεδομένων τριών όρων, όπως είναι ο μεγαλύτερος προς το μέσο όρο, έτσι είναι η διαφορά των μικρότερων προς τη διαφορά των μεγαλύτερων όρων, π.χ. στους όρους 1, 4, 6. Διότι εδώ ο μεγαλύτερος έχει προς το μέσο όρο ημιόλιο λόγο και η διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 1, δηλαδή το 3, σχηματίζει τον ίδιο λόγο προς τη διαφορά ανάμεσα στο 6 και το 4, δηλαδή το 2. Γιατί $6:4 = 3:2$. Η αναλογία αυτή αντιτίθεται στη γεωμετρική, όπως και η πέμπτη, εξαιτίας του ανεστραμμένου λόγου των διαφορών των μικρότερων προς τους μεγαλύτερους όρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXI

Σχετικά με τους τέσσερις μέσους τους οποίους εφηύραν οι μεταγενέστεροι με σκοπό να ολοκληρώσουν τη δεκάδα.

Πράγματι αυτοί είναι οι έξι μέσοι, τρεις από τους οποίους ήταν γνωστοί από τον Πυθαγόρα μέχρι τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη. Οι επόμενοι αυτών εισήγαγαν στα σχόλια τους άλλους τρεις μέσους, αυτούς που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Και οι μεταγενέστεροι, όπως ήδη είπαμε, πρόσθεσαν άλλους τέσσερις μέσους με σκοπό την ολοκλήρωση της δεκάδας. Σε αυτούς θα αναφερθούμε εν συντομία. Ο πρώτος από αυτούς, που είναι ο έβδομος στη σειρά, είναι όταν σε τρεις όρους, όπως είναι ο μεγαλύτερος προς το μικρότερο, έτσι είναι η διαφορά του μεγαλύτερου από το μικρότερο όρο προς τη διαφορά των μικρότερων όρων όπως στους όρους 6, 8, 9. Δηλαδή ο λόγος του 9 προς το 6 είναι ημιόλιος και η διαφορά τους είναι 3. Και η διαφορά των μικρότερων όρων, δηλαδή του 8 και του 6, είναι 2, το οποίο συγκρινόμενο με το προηγούμενο 3 παράγει έναν ημιόλιο λόγο.

Η δεύτερη αναλογικότητα από τις τέσσερις μεταγενέστερες, αλλά η όγδοη στη σειρά, είναι όταν σε τρεις όρους, ο λόγος των άκρων ισούται με το λόγο της διαφοράς τους προς τη διαφορά των μεγαλύτερων όρων όπως είναι στους 6, 7, 9. Διότι ο λόγος του 9 προς το 6 είναι ημιόλιος και η διαφορά τους είναι 3, το οποίο συγκρινόμενο με τη διαφορά των μεγαλύτερων όρων, δηλαδή με τη διαφορά του 9 και του 7, η οποία είναι 2, παράγει επίσης ημιόλιο λόγο.

Η τρίτη αναλογία ανάμεσα στις τέσσερις, αλλά η ένατη στην τάξη, είναι όταν, δεδομένων τριών όρων, ο λόγος του μέσου προς το μικρότερο όρο ισούται με το λόγο της διαφοράς των άκρων προς τη διαφορά των μικρότερων όρων όπως στους 4, 6, 7. Διότι ο λόγος του 6 προς το 4 είναι ημιό-

λιος. Η διαφορά τους είναι το 2. Και το 7 διαφέρει από το 4 κατά 3, του οποίου ο λόγος προς το 2 είναι ημιόλιος.

Και η τέταρτη αναλογία, αλλά η δέκατη στην τάξη, είναι όταν σε τρεις όρους, ο λόγος του μέσου προς το μικρότερο όρο, ισούται με το λόγο της διαφοράς των άκρων προς τη διαφορά των μεγαλύτερων όρων όπως στους 3, 5, 8. Διότι ο λόγος του 5, του μέσου όρου, προς το 3 είναι επιδιμερής. Αλλά ο λόγος της διαφοράς των άκρων, δηλαδή του 5, προς τη διαφορά των μεγαλύτερων όρων 8 και 5, δηλαδή του 3, είναι επίσης επιδιμερής[13].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXII

Σχετικά με τη μείζονα και τελειότερη συμφωνία, η οποία εκτείνεται σε τρεις διαστάσεις· σχετικά επίσης με την ελάσσονα συμφωνία.

Απομένει τώρα να μιλήσουμε για τη μεγαλύτερη και τελειότερη αρμονία, η οποία -καθώς υπάρχει σε τρεις διαστάσεις- κατέχει μεγάλη δύναμη στις κλίμακες μουσικού μετατονισμού και στο στοχασμό των φυσικών προβλημάτων. Τίποτε τελειότερο δεν υπάρχει από έναν τέτοιο μέσο, ο οποίος -καθώς εκτείνεται σε τρεις διαστάστεις- διαθέτει τη φύση και την ουσία του τελειότερου σώματος. Έχουμε ήδη δείξει ότι ο κύβος, ο οποίος κατέχει τρεις διαστάσεις, είναι μία πλήρης και τέλεια αρμονία. Αυτό μπορεί ωστόσο να βρεθεί αν, δοθέντων δύο όρων, αυξημένων κατά τρεις διαστάσεις, δηλαδή κατά μήκος, πλάτος και ύψος, βρεθούν δυο μέσοι οι οποίοι έχοντας τρία διαστήματα, είτε παράγονται από ίσους μέσω επίσης ίσων, είτε από άνισους σε εξίσου άνισους, είτε από άνισους σε εξίσου ίσους, είτε κατά κάποιον άλλο τρόπο. Αυτοί, μολονότι διατηρούν έναν αρμονικό λόγο, ωστόσο συγκρίνονται κατά έναν άλλο τρόπο, από τον αριθμητικό μέσο. Σε αυτούς ο γεωμετρικός μέσος, που είναι ανάμεσα στους δύο, δεν μπορεί να παραλειφθεί.

Παίρνουμε λοιπόν για παράδειγμα τη διάταξη 6, 8, 9, 12. Οι αριθμοί αυτοί εκφράζουν στερεές ποσότητες, γιατί το 6 παράγεται από 1x2x3, το 12 από 2x2x3, το 8 παράγεται από 1x2x4 και το 9 από 1x3x3. Όλοι οι όροι είναι σχετικοί μεταξύ τους και διακρίνονται από τις τρεις διαστάσεις των διαστημάτων. Σε αυτούς λοιπόν, η γεωμετρική αναλογία βρίσκεται αν το 12 συγκριθεί με το 8 και το 9 με το 6, δηλαδή 12:8=9:6. Ο καθένας από τους δύο λόγους είναι ημιόλιος. Η αριθμητική αναλογία θα επιτευχθεί, αν το 12 συγκριθεί με το 9 και το 9 με το 6, διότι σε καθένα από αυτά η διαφορά είναι 3 και το άθροισμα των άκρων είναι το διπλάσιο του μέσου. Άρα, βρίσκουμε σε αυτούς γεωμετρική και αριθμητική αναλογία. Η αρμονική αναλογία μπορεί επίσης να βρεθεί σε αυτούς, αν το 12 συγκριθεί με το 8 και το 8 με το 6. Διότι ο λόγος του 12 προς το 6 ισούται με το λόγο της διαφοράς ανάμεσα στο 12 και το 8, δηλαδή του 4, προς τη διαφορά ανάμεσα στο 8 και το 6, δηλαδή του 2. Ομοίως μπορούμε να βρούμε εδώ όλες τις μουσικές συμφωνίες. Διότι το 8 συγκρινόμενο με το 6 και το 9 με το 12 παράγουν επίτριτο λόγο και ταυτόχρονα τη δια τεσσάρων συμφωνία. Αλλά το 6 συγκρινόμενο με το 9 και το 8 με το 12 παράγουν ημιόλιο λόγο και τη δια πέντε συμφωνία. Επίσης, ο λόγος του 12 προς το 6 είναι δύο προς ένα και η συμφωνία δια πασών. Αλλά το 8 συγκρινόμενο με το 9 σχηματίζει τον επόγδοο λόγο, ο οποίος στο μουσικό μετατονισμό ονομάζεται τόνος. Ο τόνος είναι το κοινό μέτρο όλων των μουσικών ήχων, καθόσον αυτός είναι ο μικρότερος από όλους τους ήχους. Επομένως η διαφορά των συμφωνιών δια τεσσάρων και δια πέντε[14] είναι ένας τόνος, ακριβώς όπως ο επόγδοος λόγος είναι η διαφορά ανάμεσα στον επίτριτο και τον ημιόλιο λόγο.

Επιπλέον, η μικρότερη αρμονία βρίσκεται όταν σε μια διάταξη στερεών αριθμών μονάχα δυο αναλογίες θεωρηθούν δεδομένες, όπως η αριθμητική και η γεωμετρική, ή η γεωμετρική και η αρμονική, ή η αριθμητική και γεωμετρική, όπως στους όρους 5, 15, 25, 45. Σε αυτούς τους όρους μόνο η αριθμητική και η γεωμετρική αναλογίες βρίσκονται. Η γεωμετρική στους 5, 15 και 45, εφόσον 5:15=15:45· και η αριθμη-

τική στους 5, 25 και 45, εφόσον υπάρχει η ίδια διαφορά α-νάμεσα στο 25 και to 5 και ανάμεσα στο 45 και το 25. Υπάρ-χει επίσης μια μικρότερη αρμονία στους αριθμούς 40, 25, 16, 10. Διότι οι 40, 16 και 10 σχηματίζουν μια αρμονική αναλο-γία, εφόσον ο λόγος του 40 προς το 10 ισούται με το λόγο της διαφοράς ανάμεσα στο 40 και το 16 προς τη διαφορά ανάμεσα στο 16 και το 10. Αλλά οι 40, 25 και 10 σχηματί-ζουν μια αριθμητική αναλογία, αφού η διαφορά ανάμεσα στο 40 και το 25 είναι ίδια με αυτή ανάμεσα στο 25 και το 10. Τέλος, υπάρχει μια μικρότερη αρμονία στους όρους 80, 40, 32, 20, οι οποίοι περιλαμβάνουν γεωμετρικές και αρμονι-κές αναλογίες. Διότι οι 80, 40, 20 βρίσκονται σε γεωμετρική και οι 80, 32 και 20 σε αρμονική αναλογία. Ο πίνακας της επόμενης σελίδας θα διευκολύνει την κατανόηση όλων όσων εκτέθηκαν στο κεφάλαιο αυτό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXIII

Σχετικά με τους φίλιους αριθμούς.

Ο Ιάμβλιχος στην πραγματεία του *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής* παρατηρεί ότι «κάποιοι αριθμοί ο-νομάζονταν φίλιοι από εκείνους που παρομοίαζαν τις αρετές και τις ευγενείς συνήθειες με αριθμούς». Προσθέτει επίσης ότι «το 284 και το 220 είναι αριθμοί αυτού του είδους, ε-πειδή τα μέρη του ενός παράγουν τα μέρη του άλλου, σύμ-φωνα με τη φύση της φιλίας, όπως αποδόθηκε από τον Πυ-θαγόρα. Διότι όταν κάποιος τον ρώτησε τι είναι φίλος, αυ-τός απάντησε, *έτερος εγώ,* το οποίο ακριβώς φαίνεται ότι ισχύει στους αριθμούς αυτούς». Και καταλήγει πληροφορώ-ντας μας ότι «θα συζητήσει σε οικείο τόπο αυτό που παρα-δόθηκε από τους Πυθαγόρειους σχετικά με τούτη τη θαυμά-σια και εκλεπτυσμένη θεωρία». Δυστυχώς, δε συνέχισε το θέμα αυτό στην προαναφερόμενη πραγματεία, ούτε και σε κανένα άλλο σωζόμενο έργο του. Ο μόνος συγγραφέας που

Μείζονες Αρμονίες	Αναλογίες	Διαφορές και σχέσεις	Τόνος και Συμφωνίες
12, 9, 8, 6	Γεωμ. 12, 9, 8, 6	Επίτριτος στο διαχωρισμό	Επόγδοος... 9,8 Τόνος
	Αριθμ. 12, 9, 6	Διαφορά 3, 3	Επίτριτος... 8, 6 Δια Τεσσάρων
	Αρμον. 12, 8, 6	Διπλάσιος. Διαφορά 4, 2	Ημιόλιος... 9, 6 Δια Πέντε
			Διπλάσιος... 12, 6
			Τριπλάσιος... 12, 4 Δια Πέντε Διαπασών
			Τετραπλάσιος... 12, 3 Δις Διαπασών
24, 18, 16, 12	Γεωμ. 24, 18, 16, 12	Επίτριτος στο διαχωρισμό	Επόγδοος... 18, 16 Τόνος
	Αριθμ. 24, 18, 12	Διαφορά 6, 6	Επίτριτος... 16, 12 Δια Τεσσάρων
	Αρμον. 24, 16, 12	Διπλάσιος. Διαφορά 8, 4	Ημιόλιος... 18, 12 Δια Πέντε
			Διπλάσιος... 24, 12 Δια Πασών
			Τριπλάσιος... 18, 6 Δια Πέντε Διαπασών
			Τετραπλάσιος... 12, 3 Δις Διαπασών
Ελάσσονες αρμονίες	Αναλογίες	Σχέσεις και Διαφορές	
45, 25, 15, 5	Γεωμ. 45, 15, 5	Τριπλάσια αναλογία	
	Αριθμ. 45, 25, 5	Διαφορά 20, 20	
40, 25, 16, 10	Αρμον. 40, 16, 10	Τετραπλή. Διαφορά 24, 6	
	Αριθμ. 40, 25, 10	Διαφορά 15, 15	
80, 40, 32, 20	Γεωμ. 80, 40, 20	Διπλάσια αναλογία	
	Αρμον. 80, 32, 20	Τετραπλή. Διαφορά 48, 12	

γνωρίζω ότι έχει γράψει περισσότερο ολοκληρωμένα όσον αφορά τους αριθμούς αυτούς, είναι ο Οζανάμ (Ozanam), ο οποίος στις *Μαθηματικές Ψυχαγωγίες* του, σελ. 15, σημειώνει τα ακόλουθα: «Οι δύο αριθμοί 220 και 284 ονομάζονται φίλιοι, επειδή ο πρώτος 220 ισούται με το άθροισμα των υποπολλαπλάσιων μερών του τελευταίου, δηλαδή 1+2+4+71 +142=220. Με αμοιβαίο τρόπο, ο τελευταίος 284 ισούται με το άθροισμα των υποπολλαπλάσιων μερών του προηγούμενου, δηλαδή 1+2+4+5+10+11+22+44+55+110=284.

»Για να βρεις όλους τους φίλιους αριθμούς στη σειρά, χρησιμοποίησε τον αριθμό 2, ο οποίος είναι τέτοιας ποιότητας, που αν αφαιρέσεις το 1 από το τριπλάσιο του, δηλαδή το 6, από το εξαπλάσιό του, δηλαδή το 12, και από το δεκαοκταπλάσιο του τετραγώνου του, δηλαδή από το 72, τα υπόλοιπα είναι τρεις πρώτοι αριθμοί, 5, 11 και 71. Εάν το 5 και το 11 πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους και το γινόμενο 55 πολλαπλασιαστεί με το 4, το διπλάσιο του αριθμού 2, το τελικό γινόμενο 220 θα είναι ο πρώτος από τους δύο αριθμούς που ζητούμε. Για να βρούμε τον άλλο, το 284, χρειάζεται μονάχα να πολλαπλασιάσουμε τον τρίτο πρώτο αριθμό 71, με το 4, το διπλάσιο του 2 που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως.

»Για να βρούμε δύο άλλους φίλιους αριθμούς, χρησιμοποιούμε αντί του 2, μία από τις δυνάμεις του, που κατέχει την ίδια ποιότητα, όπως ο κύβος του, το 8. Αν αφαιρέσουμε μια μονάδα από το τριπλάσιο του, δηλαδή το 24, από το εξαπλάσιό του, δηλαδή το 48, και από το 1152, το δεκαοκταπλάσιο του τετραγώνου του, τα υπόλοιπα είναι τρεις πρώτοι αριθμοί, δηλαδή 23, 47, 1151. Εάν οι δύο πρώτοι 23, 47, πολλαπλασιαστούν και το γινόμενο τους 1081 πολλαπλασιαστεί με το 16, το διπλάσιο του κύβου 8, θα βρεθεί το 17296, ο πρώτος από τους δυο ζητούμενους αριθμούς. Και για τον άλλο φίλιο αριθμό, που είναι το 18416, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον τρίτο πρώτο αριθμό, το 1151 με το 16, το ίδιο διπλάσιο του κύβου 8.

»Για να βρούμε άλλους φίλιους αριθμούς, αντί του 2, ή του κύβου του 8, χρησιμοποιούμε το τετράγωνο του κύβου

δηλαδή το 64· διότι αυτό έχει την ίδια ποιότητα και θα ανταποκριθεί όπως παραπάνω».

Οι δύο φίλιοι αριθμοί που παράγονται από το 64, τους οποίους ο Οζονάμ παρέλειψε στο απόσπασμα αυτό, είναι οι 9363584 και 9437056. Οι τρεις πρώτοι αριθμοί που είναι τα υπόλοιπα είναι 191, 383 και 73727.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXIV

Σχετικά με τους πλευρικούς και τους διαμετρικούς αριθμούς[15]*.*

Όπως οι αριθμοί περιέχουν τριγωνικές, τετραγωνικές και πενταγωνικές αιτίες (ή παραγωγικές αρχές) καθώς και τις αιτίες όλων των άλλων σχημάτων εν δυνάμει (δηλαδή αιτιωδώς), κατά τον ίδιο τρόπο θα βρούμε να παρουσιάζονται στους αριθμούς, σπερματικά, πλευρικές και διαμετρικές αιτίες. Διότι από αυτούς προκύπτουν καλαίσθητα σχήματα. Όπως, επομένως, η μονάδα είναι η αρχή όλων των σχημάτων σύμφωνα προς μια ανώτατη και περιέχουσα αιτία, ομοίως η αιτία μιας διαμέτρου και μιας πλευράς περιέχονται στη μονάδα. Ας πάρουμε για παράδειγμα, δύο μονάδες, η μια από τις οποίες υποθέτουμε ότι είναι διάμετρος και η άλλη πλευρά, εφόσον είναι αναγκαίο η μονάδα, που είναι η αρχή όλων *των* σχημάτων, να είναι εν δυνάμει και πλευρά και διάμετρος. Και ας προστεθεί η διάμετρος στην πλευρά και δύο πλευρές στη διάμετρο, αφού η διάμετρος είναι εν δυνάμει μία φορά αυτό που η πλευρά είναι δύο φορές[16].

Η διάμετρος, επομένως, θα γίνει μεγαλύτερη και η πλευρά μικρότερη. Άρα, στην πρώτη πλευρά και διάμετρο που παράγονται από τη μονάδα, το τετράγωνο εν δυνάμει της διαμετρικής μονάδας θα είναι μικρότερο, κατά μία μονάδα, από το διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς που παράγεται από τη μονάδα. Γιατί οι μονάδες βρίσκονται σε ισότητα, αλλά το 1 είναι μικρότερο του 2 κατά 1. Αν προσθέσουμε ένα

στην πλευρά, δηλαδή στη μονάδα, η πλευρά θα γίνει δυο μονάδες. Και αν προσθέσουμε στη διάμετρο δυο πλευρές, δηλαδή στη μονάδα δυο μονάδες, η διάμετρος θα αποτελείται από τρεις μονάδες. Το τετράγωνο που φτιάχνεται από την πλευρά αυτή, δηλαδή το 2, είναι 4. Το τετράγωνο που φτιάχνεται από το 3, είναι το 9. Οπότε το 9 υπερβαίνει κατά 1 το διπλάσιο του τετράγωνου που σχηματίζεται από το 2.

Αν τώρα προσθέσουμε το 3 εν δυνάμει στην πλευρά 2, η πλευρά θα αποτελείται πλέον από 5 μονάδες. Αλλά αν στην τριάδα εν δυνάμει προσθέσουμε δυο πλευρές, δηλαδή δύο φορές το δύο, το άθροισμα θα είναι 7 μονάδες. Το τετράγωνο από την πλευρά θα είναι 25, ενώ το τετράγωνο από το 7 θα είναι 49. Το 49, επομένως, είναι μικρότερο κατά τη μονάδα, από το διπλάσιο του τετραγώνου 25. Επιπλέον, αν στην πλευρά προσθέσουμε το 7, το άθροισμα θα είναι 12. Και αν στη διάμετρο 7 προσθέσουμε δυο φορές την πλευρά 5, το τετράγωνο από το 17, δηλαδή το 289, θα υπερβαίνει το διπλάσιο του 144, κατά 1. Αν συνεχίσουμε την πρόσθεση με όμοιο τρόπο, θα υπάρχει μια εναλλασσόμενη αναλογία, το τετράγωνο που παράγεται από τη διάμετρο θα είναι κάποιες φορές μικρότερο κατά 1 και κάποιες φορές μεγαλύτερο κατά 1 από το διπλάσιο του τετραγώνου που παράγεται από την πλευρά. Τέτοιου είδους πλευρές και διάμετροι είναι ρητοί[17]. Αλλά οι διάμετροι εναλλάξ άλλοτε υπερβαίνουν κατά 1 το διπλάσιο εν δυνάμει των πλευρών, άλλοτε είναι μικρότερες κατά 1 από το διπλάσιο αυτών. Όλες οι διάμετροι, επομένως, θα γίνουν διπλάσιες εν δυνάμει από όλες τις πλευρές, με μια εναλλάξ υπερβολή και έλλειψη, με την ίδια μονάδα σε όλες αυτές να παράγει ισότητα, έτσι που το διπλάσιο σε όλες τους, δεν είναι ούτε υπερβολικό, ούτε ελλιπές. Διότι αυτό που ήταν ελλιπές στην προηγούμενη διάμετρο, υπερβαίνει εν δυνάμει εκείνο που ακολουθεί. Οι αριθμοί αυτοί παρατίθενται ακολούθως:

Πλευρές	**Διάμετροι**	**Το διπλάσιο των τετραγώνων των πλευρών**	**Τα τετράγωνα των διαμέτρων**
1	1	2	1

Πλευρές	Διάμετροι	Το διπλάσιο των τετραγώνων των πλευρών	Τα τετράγωνα των διαμέτρων
2	3	8	9
5	7	50	49
12	17	288	289
29	41	1682	1681
70	99	9800	9801
169	239	57122	57121

Οι πλευρές συντίθενται από την πρόσθεση της προηγούμενης διαμέτρου και της προηγούμενης πλευράς. Δηλαδή το 29 σχηματίζεται από την πλευρά 12 και τη διάμετρο 17. Οι διάμετροι συντίθενται από την προηγούμενη διάμετρο και το διπλάσιο της προηγούμενης πλευράς. Δηλαδή το 41 αποτελείται από το 17 συν 12x2, το 99 αποτελείται από το 41 συν 29x2, δηλαδή 41+58=99.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXV

Σχετικά με την αριθμητική και τη γεωμετρική σειρά.

Οτιδήποτε αναφέρθηκε έως τώρα, προέρχεται σχεδόν εξ ολοκλήρου από τους αρχαίους. Οι παρατηρήσεις που ακολουθούν είναι κατά το μεγαλύτερο μέρος τους, όπως νομίζω, καινούργιες.

Στην αριθμητική πρόοδο 1+2+3+4+5, κ.λπ., όταν ο αριθμός των όρων είναι άρτιος και πεπερασμένος, το άθροισμα των δύο μέσων όρων πολλαπλασιαζόμενο με τον αριθμό των όρων, ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος της σειράς. Έτσι σε 4 όρους, 3+2=5 και 5x4 = 20, το οποίο είναι το διπλάσιο του 10, του αθροίσματος της σειράς.

Στη γεωμετρική πρόοδο 1+2+4+8+16+32, κ.λπ., όταν ο αριθμός των όρων είναι πεπερασμένος, το άθροισμα της σειράς προστιθέμενο στη μονάδα ισούται με το διπλάσιο του

τελευταίου όρου. Έτσι το άθροισμα των 1+2+1 είναι το διπλάσιο του 2. Το άθροισμα των 1+2+4+1 είναι το διπλάσιο του 4. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους.

Στη γεωμετρική πρόοδο 1+3+9+27+81, κ.λπ., το τριπλάσιο του τελευταίου όρου υπερβαίνει το διπλάσιο του αθροίσματος της σειράς κατά τη μονάδα. Έτσι σε δύο όρους, το τριπλάσιο του 3, δηλαδή το 9, υπερβαίνει το διπλάσιο του αθροίσματος 1+3, δηλαδή του 4, κατά 1. Ομοίως το τριπλάσιο του 9, δηλαδή το 27, υπερβαίνει το διπλάσιο του αθροίσματος 1+3+9, δηλαδή του 13, κατά 1. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους.

Στη γεωμετρική πρόοδο 1+4+16+64+256, κ.λπ., το τετραπλάσιο του τελευταίου όρου υπερβαίνει το τριπλάσιο του αθροίσματος της σειράς κατά τη μονάδα.

Στη γεωμετρική πρόοδο 1+5+25+125+625, κ.λπ., το πενταπλάσιο του τελευταίου όρου υπερβαίνει το τετραπλάσιο του αθροίσματος της σειράς κατά τη μονάδα.

Στη σειρά 1+2+4+8+16, κ.λπ., όταν ο αριθμός των όρων είναι πεπερασμένος, ο τελευταίος όρος προστιθέμενος στον εαυτό του μείον τη μονάδα ισούται με το άθροισμα της σειράς. Δηλαδή, το 2 προστιθέμενο στο 2 μείον 1 ισούται με 1+2. Το 4 προστιθέμενο στο 4 μείον 3 ισούται με 1+2+4, και ούτω καθεξής.

Στη σειρά 1+3+9+27+81, κ.λπ., αν η μονάδα αφαιρεθεί από τον τελευταίο όρο και το υπόλοιπο διαιρεθεί με το 2 και προστεθεί στον τελευταίο όρο, το άθροισμα ισούται με το άθροισμα της σειράς. Έτσι 3-1=2, 2:2=1, 1+3=4 το οποίο είναι το άθροισμα των δύο πρώτων όρων. 9-1=8 και το 8: 2=4 και 4 + 9 = 13 = 1 + 3 + 9, κ.λπ.

Στη σειρά 1+4+16+64+256, κ.λπ., αν η μονάδα αφαιρεθεί από τον τελευταίο όρο και το υπόλοιπο διαιρεθεί με το 3 και προστεθεί στον τελευταίο όρο, το άθροισμα ισούται με το άθροισμα της σειράς.

Στη σειρά 1+5+25+125+625, κ.λπ., αν η μονάδα αφαιρεθεί από τον τελευταίο όρο και το υπόλοιπο διαιρεθεί με το 4 και προστεθεί στον τελευταίο όρο, το άθροισμα ισούται με το άθροισμα της σειράς.

Στις γεωμετρικές κλασματικές προόδους:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \text{ κ.λπ.}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27} \text{ κ.λπ.}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64} \text{ κ.λπ.}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125} \text{ κ.λπ.}$$

ο τελευταίος όρος πολλαπλασιαζόμενος με το άθροισμα των παρονομαστών ισούται με το άθροισμα της σειράς, όταν ο αριθμός των όρων είναι πεπερασμένος.

Έτσι $\frac{1}{8}\times 1+2+4+8=\frac{15}{8}$, δηλαδή το άθροισμα του $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$· ή $\frac{1}{27}\times 1+3+9+27=\frac{40}{27}$· το ίδιο και για τους υπόλοιπους. Αυτό θα ισχύει, οποιοσδήποτε και αν είναι ο λόγος της σειράς.

Στην πρώτη από τις σειρές αυτές, αν η μονάδα αφαιρεθεί από τον παρονομαστή του τελευταίου όρου και το υπόλοιπο προστεθεί στον παρονομαστή, το άθροισμα που προκύπτει από αυτή την πρόσθεση, πολλαπλασιαζόμενο με τον τελευταίο όρο, θα ισούται με το άθροισμα της σειράς. Δηλαδή $8-1=7$ και $7+8=15$, και $\frac{1}{8}\times 15=\frac{15}{8}$, το άθροισμα της σειράς. Στη δεύτερη από τις σειρές αυτές, αν η μονάδα αφαιρεθεί από τον παρονομαστή του τελευταίου όρου, το υπόλοιπο διαιρεθεί με το 2, και το πηλίκο προστεθεί στον παρονομαστή, το άθροισμα πολλαπλασιαζόμενο με τον τελευταίο όρο, θα ισούται με το άθροισμα της σειράς. Στην τρίτη σειρά, μετά την αφαίρεση της μονάδας, το υπόλοιπο πρέπει να διαιρεθεί με το 3, στην τέταρτη με το 4, στην πέμπτη με το 5, στην έκτη με το 6, και ούτω καθεξής.

Στη σειρά $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$, κ.λπ., η οποία εάν συνεχιστεί επ' άπειρον ισούται με το 2, εκτός ενός απειροελάχιστου, παίρνουμε οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό όρων. Αν ο παρονομαστής του τελευταίου όρου προστεθεί στον παρονομαστή του αμέσως προηγούμενου όρου, το άθροισμα αυτών των δύο πολλαπλασιαζόμενο με τον τελευταίο όρο, θα δώσει

γινόμενο ίσο με το άθροισμα της σειράς. Έτσι σε 2 όρους $1+3\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, που ισούται με το άθροισμα του $1+\frac{1}{3}$. Εαν υπάρχουν τρεις όροι, τότε $(3+6)\times\frac{1}{6}=\frac{9}{6}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Αν υπάρχουν τέσσερις όροι, τότε $(6+10)\times\frac{1}{10}=\frac{16}{10}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους.

Εάν πάρουμε το μισό κάθε όρου αυτής της σειράς, ώστε να παραχθεί η σειρά $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$, κ.λπ., τότε το μισό του αθροίσματος του παρονομαστή του τελευταίου όρου και του παρονομαστή του αμέσως προηγούμενου όρου, πολλαπλασιαζόμενο με τον τελευταίο όρο, θα ισούται με το άθροισμα της σειράς. Αν πάρουμε το ένα τρίτο από κάθε όρο, το άθροισμα των δύο παρονομαστών πρέπει να διαιρεθεί με το 3. Αν πάρουμε το ένα τέταρτο από κάθε όρο, η διαίρεση πρέπει να γίνει με το 4· και ούτω καθεξής.

Εαν πάρουμε το μισό κάθε όρου της σειράς $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ κ.λπ., ώστε να παράγουμε τη σειρά $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$, κ.λπ., και αν το άθροισμα των παρονομαστών διαιρεθεί με το 2 και το πηλίκο πολλαπλασιαστεί με τον τελευταίο όρο, θα ισούται με το άθροισμα της σειράς. Π.χ. $\frac{2+4+8}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Ομοίως, $\frac{2+4+8+16}{2}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, και το ίδιο και για τους υπόλοιπους.

Εάν όμως πάρουμε το ένα τρίτο από κάθε όρο της σειράς αυτής, η διαίρεση πρέπει να γίνει διά του 3, εάν πάρουμε το ένα τέταρτο, διαιρέτης πρέπει να είναι το 4, εάν το ένα πέμπτο, πρέπει να είναι το 5, εάν το ένα έκτο, το 6 και ούτω καθεξής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXVI

Σχετικά με τους ατελώς φίλιους αριθμούς.

Ατελώς φίλιοι αριθμοί είναι το 27 και το 35, το 39 και το 55, το 65 και το 77, το 51 και το 91, το 95 και το 119, το 69

και το 133, το 115 και το 187, το 87 και το 247. Διότι οι διαιρέτες του 27 = 3 x 9 είναι οι 1, 3, 9, το άθροισμα των οποίων είναι 13· και οι διαιρέτες του 35 = 5x7 είναι οι 1, 5, 7, το άθροισμα των οποίων είναι επίσης 13.

Οι διαιρέτες του 39 = 3 x 13 είναι οι 1, 3, 13, και το άθροισμα αυτών είναι 17. Αυτό είναι επίσης το άθροισμα των 1, 5, 11, δηλαδή των διαιρετών του 55 = 5 x 11.

Οι διαιρέτες του 65 = 13 χ 5 είναι οι 1, 5, 13. Οι διαιρέτες του 77 είναι οι 1, 7, 11· και στους δυο το άθροισμα των διαιρετών είναι 19,

Οι διαιρέτες του 51 = 17 χ 3 είναι τα 1, 3, 17 και το άθροισμα τους είναι 21. Οι διαιρέτες του 91 = 13 χ 7 είναι 1, 7, 13 και το άθροισμα τους είναι επίσης 21. Το ίδιο συμβαίνει και με τους υπόλοιπους.

Τα αθροίσματα των αριθμών που πολλαπλασιαζόμενα σχηματίζουν αυτούς τους ατελώς φίλιους αριθμούς, είναι 12, 16, 18, 20, 24, 26, 28, 32, από τους οποίους ο πρώτος διαφέρει από το δεύτερο κατά 4, ο δεύτερος από τον τρίτο και ο τρίτος από τον τέταρτο κατά 2. Ο τέταρτος διαφέρει από τον πέμπτο κατά 4, ο πέμπτος από τον έκτο κατά 2, ο έκτος από τον έβδομο κατά 2 και ο έβδομος από τον όγδοο κατά 4. Έτσι, οι διαφορές είναι 4, 2, 2, 4, 2, 2, 4, και ούτω καθεξής επ' άπειρον.

Αριθμοί αυτού του είδους δεν έχουν παρατηρηθεί από τους γνωστούς σε μένα συγγραφείς μαθηματικών συγγραμμάτων. Προσωπικά τους έδωσα την ονομασία ατελώς φίλιοι αριθμοί, επειδή σε δυο τέλεια φίλιους αριθμούς το άθροισμα των διαιρετών του ενός ισούται με τον άλλο αριθμό. Σε αυτούς όμως το άθροισμα των διαιρετών του ενός αριθμού ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του άλλου, αλλά το κάθε άθροισμα είναι μικρότερο από ολόκληρο τον αριθμό. Στους τέλεια φίλιους αριθμούς επομένως, τα μέρη (διαιρέτες) του ενός είναι σαν να περικλείουν ολόκληρο τον άλλο· αλλά στους ατελώς φίλιους τα μέρη του ενός δεν περικλείουν ολόκληρο τον άλλο αριθμό, παρά μόνο ένα μέρος του, επειδή το άθροισμα των μερών υπολείπεται του ολόκλη-

ρου. Στους ελλιπείς αριθμούς, δηλαδή σε αυτούς που το άθροισμα των διαιρετών τους είναι μικρότερο από τους ίδιους τους αριθμούς, συναντώνται πολλοί αριθμοί, οι οποίοι ανά δύο εμφανίζουν ίσο άθροισμα διαιρετών μεταξύ τους. Αντίθετα στους υπερτέλειους αριθμούς, δηλαδή σε αυτούς που το άθροισμα των διαιρετών τους υπερβαίνει τους ίδιους, ελάχιστοι αριθμοί διαθέτουν την προαναφερθείσα ιδιότητα των ατελών αριθμών. Έτσι ανάμεσα στους 12 και 144, υπάρχουν μονάχα δύο αριθμοί, των οποίων τα αθροίσματα των διαιρετών τους είναι ίσα, και αυτοί είναι το 80 και το 104. Διότι το άθροισμα των διαιρετών του καθενός είναι 106.

Καθώς οι τέλεια φίλιοι αριθμοί σκιαγραφούν την τέλεια φιλία, η οποία κατά συνέπεια βρίσκεται στην αρετή, έτσι και αυτοί οι αριθμοί αποτελούν ευκρινείς εικόνες της φιλίας που υφίσταται ανάμεσα σε φαύλους χαρακτήρες. Αυτοί δηλαδή που τα μέρη τους είναι μικρότερα από το ολόκληρο, σκιαγραφούν τη φιλία ανάμεσα σε εκείνους που στερούνται του μέτρου από το οποίο συνίσταται η αληθινή αρετή· ενώ εκείνοι που τα μέρη τους είναι μεγαλύτερα από το ολόκληρο, εκθέτουν την εικόνα της φιλίας αυτών που υπερβαίνουν αυτό το μέτρο. Όπως ομοίως, από τους φαύλους χαρακτήρες που βρίσκονται σε κάθε πλευρά γύρω από το μέσο, εκείνοι που το υπερβαίνουν, προσεγγίζουν περισσότερο την αρετή από αυτούς που υπολείπονται και είναι έξοχοι, και καθώς είναι έξοχοι, απαντώνται σπανιότερα· έτσι επίσης στους αριθμούς αυτούς, τα ζεύγη που οι διαιρέτες τους είναι μικρότεροι από τους ίδιους τους αριθμούς, είναι πολύ περισσότερα από αυτά που οι διαιρέτες τους είναι μεγαλύτεροι από τους ίδιους τους αριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXVII

Σχετικά με την ακολουθία των περισσάρτιων αριθμών.

Η ακολουθία των αριθμών αυτών είναι η ακόλουθη: 12, 20, 24, 28, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92,

96, 100, 104, 108, 112, 116, 120, 124, 132, 136, 140, 144, 148, 152, 156, 160, 164, 168, 172, 176, 180, 184, 188, 192, 196, 200, 204, 208, 212, 216, 220, 224, 228, 232, 236, 240, 244, 248, 252, 260, κ.λπ.

Στην ακολουθία αυτή παρατηρείται κατ' αρχάς ότι η διαφορά ανάμεσα στους όρους είναι πάντοτε είτε 8 είτε 4. Η διαφορά ανάμεσα στο 12 και το 20 είναι 8, αλλά ανάμεσα στο 20 και το 24 και στο 24 και το 28 είναι 4. Ή, η διαφορά ανάμεσα στο 28 και το 36 είναι 8, αλλά ανάμεσα στο 36 και το 40, στο 40 και το 44, στο 44 και το 48, στο 48 και το 52, στο 52 και το 56, στο 56 και το 60 είναι 4. Ή, η διαφορά ανάμεσα στο 60 και το 68 είναι 8, αλλά ανάμεσα στο 68 και το 72 είναι 4, και ούτω καθεξής, μέχρι να φτάσουμε στο 124 και 132, η διαφορά των οποίων είναι 8.

Κατά δεύτερον, είναι αξιοπρόσεκτο ότι η διαφορά ανάμεσα στο 12 και το 20 είναι 8, ανάμεσα στο 20 και το 36 είναι 16, ανάμεσα στο 36 και το 68 είναι 32, ανάμεσα στο 68 και το 132 είναι 64, και ούτω καθεξής, οι οποίες διαφορές βρίσκονται σε λόγο δυο προς ένα.

Κατά τρίτον, αν ο αριθμός που υπερβαίνει τον προηγούμενο του κατά 8, προστεθεί στον αριθμό που προηγείται κατά δυο θέσεις, το άθροισμα θα είναι ο επόμενος αριθμός, που θα υπερβαίνεται από τον επόμενο του κατά 8. Έτσι $36+24=60$, ο οποίος υπερβαίνεται από το 68. Ομοίως, $68+56=124$, το οποίο αμέσως προηγείται του 132. Και $132+120=252$. Το ίδιο και για τους υπόλοιπους. Είναι συνεπώς προφανές ότι η ακολουθία των περισσάρτιων αριθμών μπορεί να βρίσκεται επ' άπειρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXVIII

Σχετικά με το άθροισμα των διαιρετών των όρων διαφορετικών ακολουθιών.

Το άθροισμα των διαιρετών κάθε όρου της γεωμετρικής προόδου 2, 4, 8, 16, 32, 64, κ.λπ., ισούται με ολόκληρο τον

όρο μειωμένο κατά 1. Έτσι, ο διαιρέτης του 2 είναι 1 οι διαιρέτες του 4 είναι 2 και 1, το άθροισμα των οποίων είναι 3· οι διαιρέτες του 8 είναι 4, 2, και 1, το άθροισμα των οποίων είναι 7· οι διαιρέτες του 16 είναι 8, 4, 2, 1, το άθροισμα των οποίων είναι 15. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους όρους.

Αλλά κάθε όρος της γεωμετρικής προόδου 3, 9, 2, 7, 81, 243 κ.λπ., είναι μεγαλύτερος κατά 1 από το διπλάσιο του αθροίσματος των διαιρετών του. Έτσι, ο μόνος διαιρέτης του 3 είναι το 1 και το 3 υπερβαίνει το 2 κατά 1. Οι διαιρέτες του 9 είναι 3 και Τ και το 9 είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο του αθροίσματος τους, δηλαδή το 8, κατά 1. Ομοίως, το 27 υπερβαίνει το διπλάσιο του 13, του αθροίσματος των διαιρετών του 9, 3, και 1, κατά 1. Το 243 υπερβαίνει το διπλάσιο του 121, του αθροίσματος των διαιρετών του 81, 27, 9, 3, 1, κατά 1. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους.

Στη γεωμετρική πρόοδο 5, 25, 125, 625 κ.λπ., θα βρεθεί ότι κάθε όρος είναι μεγαλύτερος κατά 1 από το τετραπλάσιο του αθροίσματος των διαιρετών του. Στη γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το 7, κάθε όρος είναι μεγαλύτερος κατά 1 από το εξαπλάσιο του αθροίσματος των διαιρετών του. Στη γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το 9, κάθε όρος είναι μεγαλύτερος από το οκταπλάσιο του αθροίσματος των διαιρετών του κατά 1.

Ομοίως, σε όλες τις γεωμετρικές προόδους που σχηματίζονται από πολλαπλάσια περιττών αριθμών, κάθε όρος θα υπερβαίνει κατά 1 το γινόμενο του αθροίσματος των διαιρετών του επί τον προηγούμενο του περιττού άρτιο αριθμό.

Αν σε κάθε όρο της σειράς....	1	2	4	8	16	32	64	128	256
προστεθεί ο αριθμός 6....	6	6	6	6	6	6	6	6	6
τα αθροίσματα θα είναι....	7	8	10	14	22	38	70	134	262

Και αν στη σειρά....	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
προστεθούν τα....	3	6	6	6	6	6	6	6	6
τα αθροίσματα θα είναι....	4	9	15	33	87	249	735	2193	6567

Στις παραπάνω σειρές είναι αξιοσημείωτο ότι τα αθροίσματα των διαιρετών των πέντε αθροισμάτων 8, 10, 14, 22, 38, είναι αντίστοιχα 7, 8, 10, 14, 22 και των διαιρετών των πέντε αθροισμάτων 9, 15, 33, 87, 249, είναι αντίστοιχα 4, 9, 15, 33, 87. Επίσης, τα αθροίσματα των διαιρετών των αθροισμάτων 134, 262, είναι 70, 134. Τα αθροίσματα όμως πέραν του 262, αν ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία, δε θα παρουσιάζουν την ίδια ιδιότητα. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τα αθροίσματα πέραν του 249.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XXXIX

Σχετικά με την ακολουθία των όρων που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των αρτιάκις άρτιων με τα αθροίσματα που παράγονται από την πρόσθεση αυτών (βλέπε Κεφ. XV, Βιβλίο Ένα), στην οποία περιέχονται επίσης οι τέλειοι αριθμοί.

Η ακολουθία αυτή αποτελείται από τους όρους 1, 6, 28, 120, 496, 2016, 8128, 32640, 130816, κ.λπ. Το άθροισμα της είναι ο τύπος $\frac{1}{1-6+8}$ διότι όταν αναπτυχθεί, δίνει τη σειρά 1+6+28+120+496, κ.λπ., στην οποία επίσης περιέχονται όλοι οι τέλειοι αριθμοί.

Αν λοιπόν στην ακολουθία 6, 28, 496, 8128, 130816, 2096128, 33550336, 536854528, κ.λπ., δηλαδή αν στους όρους της παραπάνω ακολουθίας, παραλείποντας ανά ένα όρο μετά το 28, και αρχίζοντας από το 6, οι αριθμοί 2, 4, 16, 64, 256, κ.λπ, προστίθενται όπως παρακάτω:

	2	4	16	64	256	1024	4096	16384
	6	28	496	8128	130816	2096128	33550336	536854528
1	8	32	512	8192	131072	2097152	33554432	536870912

Τότε, το πρώτο άθροισμα θα είναι ίσο με την 3η δύναμη του 2, το δεύτερο με την 5η δύναμη του 2, το τρίτο με την 9η,

το τέταρτο με την 13η, το πέμπτο με την 17η, το έκτο με την 21η, το έβδομο με την 25η, το όγδοο με την 29η, και οΰτω καθεξής. Πάντοτε όμως τα αθροίσματα, μετά τα δυο πρώτα, θα διαφέρουν κατά 4 δυνάμεις.

Εάν αναπτυχθεί ο τύπος $\frac{1-8-96}{1-16}$, δίνει τη σειρά 1+8+32+512+8192+13072, κ.λπ. επ' άπειρον. Και ο τύπος $\frac{1-2-4}{1-4}$ δίνει τη σειρά 1+2+4+16+64+256, κ.λπ., επ' άπειρον. Αλλά εάν η τελευταία σειρά αφαιρεθεί από την προηγούμενη, δηλαδή $\frac{1-8-96}{1-16} - \frac{1-2-4}{1-4}$, δίνει $\frac{6-92+320}{1-20+64}$, το οποίο αναλυόμενο συνιστά τη σειρά 6+28+496+8128+130816, κ.λπ.

Οι όροι οι οποίοι, όταν πολλαπλασιαστούν με όρους της ακολουθίας των αριθμών που έχουν λόγο δύο προς ένα, παράγουν τη σειρά 1, 6, 28, 496, 8128, κ.λπ., είναι οι 1, 3, 7, 31, 127, 511, 2047, 8191, κ.λπ. Και η σειρά που είναι ίση με τον τελευταίο όρο αυτών των αριθμών, είναι 1+2+4+24+96+384, κ.λπ. Διότι 1=1, 1+2=3, 1+2+4=7, 1+2+4+24=31· το ίδιο και για τους υπόλοιπους. Σε αυτή τη σειρά είναι αξιοσημείωτο ότι κάθε όρος, ύστερα από τους τρεις πρώτους όρους, δηλαδή μετά από 1, 2, 4, είναι το $\frac{1}{4}$ του επόμενου όρου. Έτσι, το 24 είναι το $\frac{1}{4}$ του 96, το 96 είναι το $\frac{1}{4}$ του 384, το 384 είναι το $\frac{1}{4}$ του 1536· και ούτω καθεξής.

Ομοίως, μετά από τους τρεις πρώτους όρους, αν κάθε όρος πολλαπλασιαστεί με το 4 και στο γινόμενο προστεθεί το 3, το άθροισμα θα είναι ο επόμενος όρος. Έτσι 31x4 = 124 και 124+3=127. Επίσης, 27x4 = 508 και 508+3=511. Και πάλι, 511 x4 = 2044 και 2044+3=2047. Το ίδιο και για τους υπόλοιπους.

Είναι επίσης αξιοπρόσεκτο ότι το άθροισμα των διαιρετών του 2 και των δυνάμεων του, αυξημένο κατά 1, ισούται πάντοτε με το τελευταίο πηλίκο της διαίρεσης. Έτσι 2+1=3, το πηλίκο στη διαίρεση του 6. Και 2+4+1=7, το τελευταίο πηλίκο στη διαίρεση του 28. Και 2+4+8+16+1=31, το πηλίκο του 496. Το ίδιο και για τους υπόλοιπους.

Είναι επίσης δυνατόν να βρεθεί ε'νας τύπος που αναλυόμενος να δώσει τη σειρά 1 + 3 + 7 + 31 + 127, κ.λπ. Αυτός ο τύπος θα είναι $\frac{1-2-4+8}{1-5+4}$.

Όπως οι τέλειοι αριθμοί αναλύονται στα συστατικά μέρη τους διαιρούμενοι με το 2 και τις δυνάμεις του, έτσι ώστε τα αθροίσματα που προκύπτουν από τους διαιρέτες και τα πηλίκα, μαζί με τη μονάδα, είναι ίσα με τους αντίστοιχους τέλειους αριθμούς, έτσι επίσης το άθροισμα που προκύπτει από μια παρόμοια διαίρεση οποιουδήποτε όρου στη σειρά 6 + 8 + 496 + 8128 + 130816 + 2096128, κ.λπ., έστω και αν δεν είναι ένας τέλειος αριθμός, θα ισούται με τον ίδιο τον όρο, αν και μια τέτοια διαίρεση δε θα τον αναλύσει σε όλα τα μέρη του.

Αλλά για να κατανοήσει ο αναγνώστης περισσότερο το νόημα μου και να πεισθεί πλήρως, παραθέτω στις παρακάτω σελίδες παραδείγματα που αναλύουν δέκα όρους της σειράς αυτής, διαιρεμένους στα μέρη τους με αυτούς τους διαιρέτες. Ανάμεσα σε αυτούς τους όρους μόνο οι τέσσερις είναι τέλειοι αριθμοί.

Στο πρώτο παράδειγμα είναι εμφανές ότι τα 3, 2 και 1, είναι όλα τα δυνατά μέρη του 6. Γιατί το 3 είναι το μισό, το 2 το ένα τρίτο και το 1 το ένα έκτο του 6. Ακολούθως, τα 14, 7, 4, 2 και 1 είναι όλα τα μέρη του 28. Ομοίως, στη διαίρεση του 496 στα μέρη του, το 465 είναι το άθροισμα των πηλίκων που προκύπτουν από τη διαίρεση του με το 2 και τις δυνάμεις του. Επειδή το μισό του 496 είναι το 248, προκύπτει το ίδιο πηλίκο αν διαιρεθεί το 248 με το 2, ή αν διαιρεθεί το 496 με το 4. Για τον ίδιο λόγο, προκύπτει το ίδιο πηλίκο αν διαιρεθεί το 124, το μισό του 248, με το 2, ή το 496 με το 8. Ομοίως αν διαιρεθεί το 62, το μισό του 124, με το 2, ή αν διαιρεθεί το 496 με το 16. Άρα, οι διαιρέτες του 496 είναι τα 2, 4, 8, 16, και το άθροισμα αυτών προστιθέμενο στο 1 και στο 465, είναι 496. Κατά έναν όμοιο τρόπο, στο τέταρτο παράδειγμα το 8001 είναι το άθροισμα των πηλίκων που προκύπτουν από τη διαίρεση με το 2 και τις δυνάμεις του. Και οι διαιρέτες του 8128 είναι οι 2, 4, 8, 16, 32, 64, το άθροισμα των οποίων προστιθέμενο στο 1 και στο 8001, ισού-

ται με 8128. Το ίδιο διαπιστώνεται και στα άλλα παραδείγματα.

(1).

2)6	3
3	2
	1
	6

(2).

2)28	14
2)14	7
7	4
	2
	1
	28

(3).

2)496	465
2)248	2
2)124	4
2)62	8
31	16
465	1
	496

(4).

2)8128	8001
2)4064	2
2)2032	4
2)1016	8
2)508	16
2)254	32
127	64
8001	1
	8128

(5).

2)130816	130305
2)65408	2
2)32704	4
2)16352	8
2)8176	16
2)4088	32
2)2044	64
2)1022	128
511	256
130305	1
	130816

(6).

2)2096128	2094081
2)1048064	2
2)524032	4
2)262016	8
2)131008	16
2)65504	32
2)32752	64
2)16376	128
2)8188	256
2)4094	512
2047	1024
2094081	1
	2096128

(7).

2)33550336
2)16775168
2)8387584
2)4193792
2)2096896
2)1048448
2)524224
2)262112
2)131056
2)65528
2)32764
2)16382
8191
33542145

33542145
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048
4096
1
33550336

(8).

2)536854528
2)268427264
2)134213632
2)67106816
2)33553408
2)16776704
2)8388352
2)4194176
2)2097088
2)1048544
2)524272
2)262136
2)131068
2)65534
32767
536821761

536821761
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048
4096
8192
16384
1
536854528

(9).

2)8589869056
2)4294934528
2)2147467264
2)1073733632
2)536866816
2)268433408
2)134216704
2)67108352
2)33554176
2)16777088
2)8388544
2)4194272
2)2097136
2)1048568
2)524284
2)262142
131071

8589737985

8589737985
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048
4096
8192
16384
32768
65536
1

8589869056

(10).

2)137438691328
2)68719345664
2)34359672832
2)17179836416
2)8589918208
2)4294959104
2)2147479552
2)1073739776
2)536869888
2)268434944
2)134217472
2)67108736
2)33554368
2)16777184
2)8388592
2)4194296
2)2097148
2)1048574
524287

137438167041

137438167041
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048
4096
8192
16384
32768
65536
131072
262144
1

137438691328

Μόνον οκτώ τέλειοι αριθμοί έχουν ως τώρα βρεθεί, επειδή ακριβώς είναι ιδιαίτερα δύσκολο σε πάρα πολύ μεγάλους όρους να εξακριβωθεί εάν ένας αριθμός είναι πρώτος ή όχι. Οι οκτώ τέλειοι είναι οι εξής: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128. Αναπτύσσοντας τον τύπο $\frac{6-92+320}{1-20+64}$ σε είκοσι όρους, ο αναγνώστης θα δει την απόσταση που έχουν αυτοί οι τέλειοι αριθμοί μεταξύ τους. Οι είκοσι όροι είναι οι ακόλουθοι, ενώ οι τέλειοι διακρίνονται από τον αστερίσκο:

* 6, * 28, * 496, * 8128, 130816, 2096128, * 33550336, 536854528,

* 8589869056 , * 137438691328, 2199022206976, 35184367894528,

562949936644096, 9007199187632128, 144115187807420416,

* 2305843008139952128, 36893488143124135936,

590295810341525782528, 9444732965670570950656,

151115727451553768931328

Από την παραπάνω διάταξη φαίνεται ότι ο όγδοος τέλειος αριθμός είναι ο 16ος όρος της σειράς που παράγεται από την ανάπτυξη του $\frac{6-92+320}{1-20+64}$. Εν τούτοις, υπάρχουν μόνο οκτώ τέλειοι αριθμοί σε είκοσι όρους της ακολουθίας αυτής. Συνεπώς, είναι φανερό ότι ο Ρούφους (Ruffus) στο *Σχόλια πάνω στην Αριθμητική του Βοήθιου,* έσφαλλε όταν ισχυριζόταν ότι κάθε δεύτερος όρος αυτής είναι ένας τέλειος αριθμός.

Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι στην ακολουθία αυτή οι όροι λήγουν εναλλάξ σε 6 και 8. Αυτό ισχύει για τους πρώτους τέσσερις τέλειους αριθμούς, οι άλλοι τέσσερις λήγουν πράγματι σε 6 και 8, αλλά όχι εναλλάξ.

Οι υπόλοιποι όροι αυτής της ακολουθίας, λόγω της σχέσης τους με τους τέλειους αριθμούς, μπορούν επίσης να ονομαστούν μερικώς τέλειοι. Διότι και οι δύο αναλύονται σε μέρη από το 2 και τις δυνάμεις του, το άθροισμα των οποίων ισούται με ολόκληρο τον αριθμό· και οι δύο επίσης λήγουν σε 6 και 8. Επιπροσθέτως, στη σειρά 1 + 8 + 32 + 512+8192, κ.λπ., που παράγεται από την ανάπτυξη του $\frac{1-8-96}{1-16}$, το μισό του κάθε όρου μετά τον πρώτο είναι ένας τετράγωνος αριθμός. Το μισό του 8, του 32, του 512, κ.λπ., δηλαδή οι 4, 16, 256, είναι τετράγωνοι αριθμοί. Και αν κάθε όρος από τη σειρά 6 + 28 + 496 + 8128 + 130816, κ.λπ., διπλασιαστεί, το άθροισμα των διαιρετών του καθενός είναι ένας τετράγωνος αριθμός. Έτσι το άθροισμα των διαιρετών του 12, του διπλάσιου του 6, είναι το 16· το άθροισμα των διαιρετών του 56, του διπλάσιου του 28, είναι 64· το άθροισμα των διαιρετών του 992, του διπλάσιου του 496, είναι 1024, ρίζα του οποίου είναι το 32· το άθροισμα των διαιρετών του 16256, του διπλάσιου του 8128, είναι 16384, η τετραγωνική ρίζα του οποίου είναι 128· και των διαιρετών του 216632, του διπλάσιου του 130816, είναι 262144, η τετραγωνική ρίζα του οποίου είναι 512. Και το ίδιο και για τους υπόλοιπους. Όλες οι ρίζες μετά τη δεύτερη αυξάνονται σε μια αναλογία τέσσερα προς ένα. Καθώς αυτή η ιδιότητα ισχύει στους όρους που δεν είναι τέλειοι αριθμοί, όπως ακριβώς σε εκείνους που είναι, φανερώνει σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό τη σχέση αυτών που εγώ ονομάζω μερικώς τέλειους με τους πλήρως τέλειους αριθμούς.

Επιπλέον, αν το 2 αφαιρεθεί από τον αριθμό της τάξης που κάθε αριθμός μετά το 28 έχει στην ακολουθία 6, 28, 496, 8128, 130816, κ.λπ., και το υπόλοιπο προστεθεί στον αριθμό της εν λόγω τάξης, το άθροισμα θα είναι ο εκθέτης εκείνης της δύναμης του 2, η οποία πολλαπλασιαζόμενη με τον αντίστοιχο του αριθμό στην ακολουθία 3, 7, 31, 127, 511, κ.λπ., παρήγαγε τον πλήρως ή μερικώς τέλειο αριθμό. Έτσι, αν από το 3 αφαιρέσουμε το 2, και προσθέσουμε 3 στο υπόλοιπο 1, το άθροισμα 4 θα υποδεικνύει ότι η τέταρτη δύναμη του 2,

δηλαδή το 16, πολλαπλασιασμένη με τον τρίτο όρο 31, θα δώσει τον τρίτο όρο, δηλαδή το 496, στην ακολουθία 6, 28, 496, 8128, κ.λπ. Ομοίως, αν το 2 αφαιρεθεί από το 4 και το 4 προστεθεί στο υπόλοιπο, το άθροισμα 6 θα δηλώνει ότι η έκτη δύναμη του 2, δηλαδή το 64, πολλαπλασιασμένη με τον τέταρτο όρο 127, θα παράγει τον τέταρτο όρο 8128, της ακολουθίας 6, 28, 496, 8128, κ.λπ. Το ίδιο και για τους υπόλοιπους.

Ο πιο σύντομος κανόνας για να βρούμε έναν αριθμό που είναι είτε πλήρως είτε μερικώς τέλειος στην ακολουθία 6, 28, 496, 8128, 130816, κ.λπ., όταν δίνεται οποιοσδήποτε όρος αυτής, είναι ο ακόλουθος: Πολλαπλασιάστε τον δοσμένο τέλειο ή μερικώς τέλειο αριθμό με το 16 και προσθέστε στο γινόμενο δώδεκα φορές τον αντίστοιχο αριθμό από την ακολουθία των αριθμών που έχουν λόγο δύο προς ένα. Αν το νέο άθροισμα πολλαπλασιαστεί με ένα αντίστοιχο αριθμό στην ακολουθία 3, 7, 31, 127, 511, κ.λπ., παράγεται ο τέλειος ή ο μερικώς τέλειος αριθμός στη σειρά 6, 28, 496, κ.λπ. Έτσι, 28 χ 16 - 448 και 448 προστιθέμενο στο 12 x 4, δηλαδή στο 48, ισούται με 496. Ομοίως, 496 x 16 = 7936, και 7936 + (12 x 16) = 8128. Το ίδιο και για τους υπόλοιπους.

Τέλος όλοι οι τέλειοι αριθμοί βρίσκονται στην ακολουθία των εξαγωνικών αριθμών, που είναι οι 1, 6, 15, 28, 45, 66, κ.λπ. Ο τύπος που συνιστά το άθροισμα τους και που όταν αναλυθεί δίνει όλους αυτούς με σειρά επ' άπειρον, είναι $\frac{1+3}{1-3+3-1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XL

Σχετικά με ένα άλλο είδος των ατελώς φίλιων αριθμών.

Ο Οζανάμ, στις *Μαθηματικές Ψυχαγωγίες,* δεν αναφέρει ποιοι αριθμοί πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να βρεθούν άλλοι φίλιοι αριθμοί μετά το 9363584 και 9437056[18].

Μετά από πολλές προσπάθειες ανακάλυψα ότι αν οποιοσδήποτε αριθμός, από τον οποίο βρίσκονται δυο φίλιοι αριθμοί, πολλαπλασιαστεί με το 8, το γινόμενο θα είναι ένας αριθμός από τον οποίο μπορούν να βρεθούν είτε δύο αριθμοί που το άθροισμα όλων των διαιρετών του ενός ισούται με τον άλλο, είτε δύο αριθμοί από τους οποίους το άθροισμα των διαιρετών του ενός που προκύπτουν μόνον κατόπιν διαίρεσης με το 2 και τις δυνάμεις του, θα είναι ίσο με τον άλλο. Έτσι, αν το 64 πολλαπλασιαστεί με το 8, το γινόμενο θα είναι 512. Οι τρεις αριθμοί που σχηματίζονται όπως οι πρώτοι που παράγουν φίλιους αριθμούς, θα είναι 1535, 3071 και 4718591. Θα παραχθούν επίσης δύο αριθμοί 4827120640 και 4831837184, όπου το άθροισμα των διαιρετών του δεύτερου, που προκύπτουν από διαίρεση με το 2 και τις δυνάμεις του, με την πρόσθεση της μονάδας, θα ισούται με τον πρώτο. Επιπλέον, αν το 512 πολλαπλασιαστεί με το 8, το γινόμενο θα είναι 4096. Οι τρεις αριθμοί που αντιστοιχούν σε πρώτους θα είναι 12287, 24575 και 301989887. Και οι δύο ατελώς φίλιοι αριθμοί θα είναι ο 2473599180800 και ο 2473901154304. Σε αυτούς το άθροισμα των διαιρετών του τελευταίου που προκύπτουν από διαίρεση με το 2 και τις δυνάμεις του, με την πρόσθεση της μονάδας, θα ισούται με τον πρώτο. Επίσης, το γινόμενο 4096 πολλαπλασιαζόμενο με το 8 θα είναι 32768. Οι τρεις αριθμοί που είναι πρώτοι ή αντιστοιχούν σε πρώτους, θα είναι 98303, 196607 και 19327352831. Και οι δύο ατελώς ή τέλεια φίλιοι θα είναι οι 1266618067910656 και 1266637395132416.

Τέλος, αν το 32768 πολλαπλασιαστεί με το 8, το γινόμενο θα είναι 262144. Οι τρεις αριθμοί που είτε είναι πρώτοι είτε αντιστοιχούν σε πρώτους, θα είναι οι 786431, 1572863 και 1236950581247. Και οι δύο ατελώς ή τέλεια φίλιοι αριθμοί θα είναι 648517109391294464 και 648518346340827136.

Για να μπορέσει ο αναγνώστης να εξοικειωθεί με τη μέθοδο εύρεσης των διαιρετών των τέλεια φίλιων αριθμών, θα δώσω ένα παράδειγμα αυτής με τους δύο αριθμούς 9363584 και 9437056. Διαιρούμε λοιπόν τον πρώτο από αυτούς τους αριθμούς με το 2 και τις δυνάμεις του 2, δηλαδή 4, 8, 16, 32, 64, κ.λπ., μέχρι η διαίρεση να καταλήξει σε ένα υπόλοιπο

που είναι, πρώτος αριθμός. Τα πηλίκα αυτά με το αδιαίρετο υπόλοιπο θα είναι όπως παρακάτω: 4681792, 2340896, 1170448, 585224, 292612, 146306, 73153. Στη συνέχεια, εφόσον οι δύο πρώτοι αριθμοί 191 και 383 πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους για να παράγουν τον αριθμό 9363584, γίνεται φανερό ότι είναι και μέρη αυτού, άρα πρέπει να χρησιμοποιηθούν ως διαιρέτες του. Αν διαιρέσουμε τον 9363584 με το 191, το πηλίκο είναι 49024· και η διαίρεση με το 383 μας δίνει πηλίκο 24448. Καθένα από αυτά τα πηλίκα, μπορεί επίσης να διαιρεθεί με το 2 και τις δυνάμεις του. Τα πηλίκα επομένως που προκύπτουν από τη διαίρεση του 49024 με το 2 και τις δυνάμεις του, είναι 24512, 12256, 6128, 3064, 1532, 766, το υπόλοιπο είναι 383. Αντίστοιχα, τα πηλίκα που προκύπτουν από μια παρόμοια διαίρεση του 24448 είναι 12224, 6112, 3056, 1528, 764, 382 και το υπόλοιπο είναι 191. Το άθροισμα συνεπώς όλων αυτών των πηλίκων θα είναι:

$$
\begin{array}{r}
4681792\\
2340896\\
1170448\\
585224\\
292612\\
146306\\
73153\\
49024\\
24448\\
24512\\
12256\\
6128\\
3064\\
1532\\
766\\
383\\
12224\\
6112\\
3056\\
1528\\
764\\
382\\
191\\
\hline
9436801
\end{array}
$$

Αν στο άθροισμα αυτό προστεθεί το άθροισμα του 2 με τις δυνάμεις του, συμπεριλαμβανόμενης της μονάδας, δηλαδή αν γίνει η πρόσθεση με το 1+2+4+8+16+32+64+128= 255, το άθροισμα θα είναι 9437056, ο δεύτερος από τους φίλιους αριθμούς.

Με όμοιο τρόπο, αν το 9437056 διαιρεθεί με το 2 και τις δυνάμεις του, τα πηλίκα και το άθροισμα τους θα είναι όπως παρακάτω:

$$\begin{array}{r} 4718528 \\ 2359264 \\ 1179632 \\ 589816 \\ 294908 \\ 147454 \\ 73727 \\ \hline 9363329 \end{array}$$

Αν στο άθροισμα αυτό προστεθεί το 255, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το άθροισμα θα είναι 9363584, ο πρώτος από τους φίλιους αριθμούς.

Η πρώτη παρατήρηση σε σχέση με αυτούς τους τέλεια φίλιους αριθμούς είναι ότι ο αριθμός 2 και οι δυνάμεις του χρησιμοποιούνται στην παραγωγή όλων αυτών. Δεν μπορούν να παραχθούν από κανέναν άλλον αριθμό και τις δυνάμεις αυτού. Γιατί, καθώς αυτοί οι φίλιοι αριθμοί είναι εικόνες της αληθινής φιλίας, φαίνεται πιο καθαρά ότι τέτοια φιλία μπορεί να υπάρξει μόνο ανάμεσα σε δύο άτομα.

Κατά δεύτερον, οι αριθμοί 3, 6 και 18, που χρησιμοποιούνται στο σχηματισμό αυτών των αριθμών, αποκαλύπτουν με ενάργεια την τελειότητα, είναι επομένως εικόνες της τελειότητας της αληθινής φιλίας. Γιατί το 3 και το 6 είναι οι πρώτοι τέλειοι αριθμοί. Ο πρώτος είναι το παράδειγμα της ολότητας, καθώς εμπεριέχει την αρχή, το μέσο και το τέλος. Ο δεύτερος είναι ίσος σε όλα τα μέρη του και το 18 παράγεται από τον πολλαπλασιασμό του 6 επί 3.

Κατά τρίτον, η σπανιότητα αυτών των αριθμών σκιαγραφεί με τον πιο υπέροχο τρόπο τη σπανιότητα της αληθινής φιλίας. Γιατί ανάμεσα στο 1 και το 1000 υπάρχουν μόνο δύο, ανάμεσα στο 284 και το 20.000 υπάρχουν επίσης μόνο δύο,

ανάμεσα στο 18416 και τα δέκα εκατομμύρια μόνο άλλοι δύο.

Κατά τέταρτον, όσο μεγαλύτεροι είναι οι αριθμοί στην σειρά των τέλεια και ατελώς φίλιων αριθμών, τόσο περισσότερο αυτοί προσεγγίζουν την τέλεια ισότητα. Για παράδειγμα, ο λόγος του 284 προς το 220 μπορεί να δοθεί ως $1\frac{64}{220}$ και με αναγωγή $1\frac{16}{55}$. Ο λόγος του 17296 προς το 18416 αναλύεται σε $1\frac{1120}{17296}$ και με αναγωγή $1\frac{70}{1081}$. Το $\frac{70}{1081}$ είναι πολύ μικρότερο από το $\frac{16}{55}$. Ο λόγος του 9437056 προς το 9363584 είναι $1\frac{73472}{9363584}$ και με αναγωγή $1\frac{287}{73153}$. Το $\frac{287}{73153}$ είναι πολύ μικρότερο από το $\frac{70}{1081}$. Κατά έναν όμοιο τρόπο θα βρεθεί ότι η διαφορά των λόγων των διαδοχικών φίλιων αριθμών συνεχώς θα ελαττώνεται. Συνεπώς όσο μεγαλύτεροι γίνονται δυο φίλιοι αριθμοί τόσο περισσότερο προσεγγίζει ο ένας τον άλλο. Αυτό γίνεται πράγματι φανερό στους μετά τους πρώτους τρεις φίλιους αριθμούς, εξετάζοντας απλώς τους ίδιους. Διότι στους φίλιους 4827120640 και 4831837184, τα δύο πρώτα ψηφία του καθενός από αριστερά είναι ίδια, δηλαδή το 4 και το 8. Στους φίλιους 2473599180800 και 2473901154304, τα πρώτα τέσσερα ψηφία 2473 είναι κοινά. Στους φίλιους αριθμούς 1266618067910656 και 1266637395132416, τα πέντε πρώτα ψηφία είναι ίδια. Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για τους επόμενους δυο φίλιους αριθμούς, δηλαδή τους 6485171093929446 4 και 64851834634082713 6. Και στους δυο φίλιους που ακολουθούν μετά από έναν αριθμό, δηλαδή στους 1700051883167576804556 80 και 170005193383307194138624, τα πρώτα επτά ψηφία από αριστερά είναι κοινά. Από όλα αυτά φαίνεται ότι όσο μεγαλύτεροι είναι δύο φίλιοι αριθμοί, τόσο αυξάνουν τα κοινά ψηφία. Άρα η προσέγγιση τους σε μια τέλεια ισότητα είναι μεγαλύτερη.

Εν συνεχεία θα αναφερθούμε στις αξιοσημείωτες ιδιότητες των πρώτων αριθμών και των αριθμών που αντιστοιχούν σε πρώτους, από τους οποίους παράγονται και τα δύο είδη των φίλιων αριθμών.

Αυτοί οι αριθμοί είναι οι ακόλουθοι:

5	11	71
23	47	1151
191	383	73727
1535	3071	4718591
12287	24575	301989887
98303	196607	19327352831

Αρχικά, (2x5) + 1 = 11, (2 x 23) + 1=47, (2 x 91) +1 = 383, (2 x 1535) + 1 = 3071, (2 x 12287) + 1 = 24575 και (2 x 98303) + 1 = 196607. Άρα το διπλάσιο του πρώτου αριθμού σε κάθε σειρά, προστιθέμενο στη μονάδα, ισούται με το δεύτερο αριθμό στην ίδια σειρά.

Στη συνέχεια, ο πρώτος αριθμός της πρώτης σειράς πολλαπλασιαζόμενος με το 4 και προσθέτοντας στο γινόμενο το 3, θα ισούται με τον πρώτο αριθμό της δεύτερης σειράς. Επίσης, ο δεύτερος αριθμός της πρώτης σειράς 11x4 = 44, 44 + 3=47, που είναι ο δεύτερος αριθμός της δεύτερης σειράς. Αλλά πιο κάτω βλέπουμε 23 x 8 = 184, 184 + 7 = 191, (47χ 8) + 7 = 383, (191 x 8)+ 7 = 1535, (383 x 8)+7=3071, (1535 x8) + 7 = 12287, (3071 x 8) + 7 = 24575, (12287x8) + 7 = 98303, και (24575 x 8) + 7=196607.

Πάλι, (47 x 4) + 3 = 191, (383 x 4) + 3 = 1535, (3071 x 4) + 3 = 12287 και (24575 x 4) + 3 = 98303.

Επίσης, $\frac{1151}{71}$=16 και υπόλοιπο 15· $\frac{73727}{1151}$=64 και υπόλοιπο 63· $\frac{4718591}{73727}$=64 και το υπόλοιπο είναι 63· και $\frac{301989887}{4718591}$=64, με το ίδιο υπόλοιπο 63. Το ίδιο παρατηρείται στους υπόλοιπους αριθμούς επ' άπειρον, το πηλίκο και το υπόλοιπο θα είναι πάντοτε 64 και 63 αντιστοίχως.

Ως εκ τούτου, άπειρες σειρές όλων αυτών των αριθμών μπορούν εύκολα να βρεθούν, δηλαδή από τους δύο πρώτους όρους κάθε σειράς, εξαιρουμένης της πρώτης, και από τον τρίτο όρο κάθε σειράς, εξαιρουμένων των δύο πρώτων σειρών. Διότι $\frac{23 + 7 + 7 + 7 \text{ κ.λπ. στο άπειρο}}{1 - 8}$=23 + 191 + 1535 + 12287, κ.λπ.

$\frac{47+7+7+7 \text{ κ.λπ. στο άπειρο}}{1-8}=47+383+3071+24575$, κ.λπ.

Και $\frac{73727+63+63+63 \text{ κ.λπ. στο άπειρο}}{1-64}=73727+4718591$, κ.λπ. Αλλά οι τύποι αυτοί με αναγωγή θα γίνουν $\frac{23-16}{1-9+8}$, $\frac{47-40}{1-9+8}$ και $\frac{73727-73664}{1-65+64}$.

Μια άλλη αξιοσημείωτη ιδιότητα αυτών των αριθμών είναι ότι το γινόμενο των δύο πρώτων αριθμών κάθε σειράς, αν αφαιρεθεί από τον τρίτο αριθμό της ίδιας σειράς, δίνει υπόλοιπο ίσο με το άθροισμα των δύο πρώτων. Δηλαδή, 5 x 11 = 55, 71-55 = 16. Αλλά 16 = 5 + 11. Ομοίως, 23 x 47=1081 και 1151-1081 = 70 = 23 + 47. Με τον ίδιο τρόπο, 191 x383 = 73153 και 73727-73153 = 574=191 + 383. Έτσι ισχύει και για τους υπόλοιπους. Άρα, ο τρίτος μείον το άθροισμα των δύο πρώτων αριθμών, θα ισούται με το γινόμενο των δύο πρώτων. Από τους τύπους λοιπόν που δόθηκαν προηγουμένως και με βάση όσα αποδείξαμε τώρα, θα είναι εύκολο να βρεθεί ένας τύπος, που αναπτυσσόμενος θα δώσει μια άπειρη ακολουθία των γινομένων των δύο πρώτων αριθμών σε κάθε σειρά. Ο τύπος αυτός (ο πρώτος όρος του οποίου είναι το γινόμενο των δύο πρώτων αριθμών στην τρίτη σειρά, προκειμένου να είναι στην ίδια σειρά με τον τύπο $\frac{73727-73664}{1-65+64}$), θα είναι $\frac{73153-699337+1179656-503472}{1-74+657-1096+512}$.

Όλοι αυτοί λοιπόν οι φίλιοι αριθμοί, μετά τα 17296 και 18416, μπορούν να βρεθούν με σειρά, αν ο πρώτος όρος της άπειρης ακολουθίας που προκύπτει από την ανάπτυξη καθενός από αυτούς τους τύπους πολλαπλασιαστεί με 128, ο δεύτερος όρος του με 1024, ο τρίτος όρος με 8192, και ούτω καθεξής. Οι πολλαπλασιαστές πάντοτε θα αυξάνουν έχοντας μεταξύ τους λόγο οκτώ προς ένα.

Για να αποδείξουμε όσα ισχυριστήκαμε σχετικά με αυτό το είδος των φίλιων αριθμών, παραθέτουμε τα παρακάτω παραδείγματα, στα οποία δύο από αυτούς τους αριθμούς αναλύονται σε μέρη, βάσει της διαίρεσης με το 2 και τις δυνάμεις του.

Κατ' αρχάς, το άθροισμα των διαιρετών του αριθμού 4831837184 ισούται με 4827120640, όπως γίνεται φανερό από την παρακάτω διαίρεση:

2)4831837184
2)2415918592
2)1207959296
2)603979648
2)301989824
2)150994912
2)75497456
2)37748728
2)18874364
2)9437182
4718591

4827118593
+ 2047

4827120640

Διαιρέτες που προκύπτουν από το 2 και τις δυνάμεις του με την προσθήκη της μονάδας.

1
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024

Σύνολο 2047

Το ακόλουθο παράδειγμα είναι με τους αριθμούς 2473901154304 και 2473599180800:

2)2473901154304

2)1236950577152

2)618475288576

2)309237644288

2)154618822144

2)77309411072

2)38654705536

2)19327352768

2)9663676384

2)4831838192

2)2415919096

2)1207959548

2)603979774

301989887

2473599164417
+ 16383

2473599180800

Διαιρέτες με την προσθήκη της μονάδας.

1
2
4
8
16
32
64
128
256
512
1024
2048
4096
8192

Σύνολο 16383

Η πλέον εκπληκτική παρατήρηση σχετικά με αυτή την ακολουθία των αριθμών είναι ότι όσο μεγαλύτερο γίνεται οποιοδήποτε ζευγάρι από αυτούς, τόσο πλησιάζουν αυτοί οι αριθμοί την τέλεια ισότητα· έτσι ώστε αν η σειρά μπορούσε να επεκταθεί στο άπειρο, το τελευταίο ζευγάρι αριθμών θα αποτελείτο από δύο ίσους αριθμούς.

Είναι εξίσου φανερό από το σχηματισμό αυτής της ακολουθίας ότι όλοι οι τέλεια όπως και οι ατελώς φίλιοι αριθμοί εμπεριέχονται σε αυτήν. Έτσι αντιστοιχεί από την άποψη αυτή στην ακολουθία που δόθηκε προηγουμένως, στην οποία περιέχονται όλοι οι τέλεια και ατελώς φίλιοι αριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XLI

Σχετικά με το γεωμετρικό αριθμό στο όγδοο βιβλίο της Πολιτείας του Πλάτωνα.

Η ασάφεια της αναφοράς του Πλάτωνα σχετικά με το γεωμετρικό αριθμό είναι τόσο μεγάλη, ώστε είχε γίνει παροιμιώδης για τους αρχαίους. Δυστυχώς δε διασαφηνίστηκε σε κανένα από τα ανεκτίμητα έργα της ελληνικής φιλοσοφίας που έχουν διασωθεί μέχρι σήμερα Θα προσπαθήσουμε λοιπόν στη συνέχεια να σύρουμε αυτό το πέπλο της ασάφειας.

Αρχικά παραθέτουμε ολόκληρο το σχετικό απόσπασμα από την *Πολιτεία:* «Είναι πραγματικά δύσκολο μια πολιτεία με αυτό τον τρόπο συγκροτημένη, να μεταβληθεί· αλλά όπως κάθε πράγμα που γεννάται, υπόκειται σε φθορά, και αυτό το πολιτικό σύνταγμα δε θα παραμείνει αναλλοίωτο για πάντα, αλλά θα διαλυθεί. Και να πώς επέρχεται η διάλυση. Υπάρχει όχι μόνο για τα φυτά της γης, αλλά ομοίως και για τα ζώα αυτής, περίοδος ευφορίας και αγονίας τόσο στην ψυχή όσο και στο σώμα. Και τούτο συμβαίνει, όταν οι περιστροφές των ουράνιων σωμάτων ολοκληρώνουν την περιφέρεια της αντίστοιχης τροχιάς τους, που είναι μικρότερη στους βραχύβιους και αντίθετη σε εκείνους που είναι αντίθετοι[19].

Οι δικοί σας άρχοντες, τους οποίους εσείς εκπαιδεύσατε, όσο σοφοί και αν είναι, μπορεί να συμβεί να μην εννοήσουν ή να μην υπολογίσουν με ακρίβεια αυτές τις περιόδους της ευφορίας και της αγονίας του είδους σας, να τους διαφεύγει ο κατάλληλος καιρός και να τεκνοποιήσουν όταν δεν πρέπει. Και η περίοδος αυτή για μεν *τα θεία γεννητά* είναι εκείνη

που περιλαμβάνει ο τέλειος αριθμός· για δε το ανθρώπινο γένος, υπάρχει ένας αριθμός όπου αυξήσεις δυνάμενες και δυναστευόμενες, αφού λάβουν τρεις αποστάσεις και τέσσερα όρια παραγόντων που ομοιώνουν και ανομοιώνουν, αυξάνουν και ελαττώνουν, καταστούν στο τέλος όλα τα στοιχεία προσήγορα και ρητά· η επίτριτη βάση τους, αφού συνενωθεί με την πεντάδα και πολλαπλασιαστεί τρεις φορές, δίνει δύο αρμονίες. Η μια αποτελείται από αριθμό ίσες φορές ίσο, εκατό φορές εκατό· η άλλη, κατά τη μια φορά της ισομήκης και κατά την άλλη προμήκης, αποτελείται από εκατό αριθμούς ρητών διαμέτρων της πεντάδας[20], καθεμία ελαττωμένη κατά τη μονάδα, και από δύο αριθμούς που είναι άρρητοι, και από εκατό κύβους της τριάδας. Ολόκληρος αυτός ο γεωμετρικός αριθμός κανονίζει την περίοδο των καλύτερων και των χειρότερων γεννήσεων, όταν δε από άγνοια του αριθμού αυτού οι άρχοντες ζευγαρώσουν τους άντρες και τις γυναίκες σε ακατάλληλη εποχή, τότε θα γεννηθούν παιδιά όχι με καλά φυσικά, ούτε ευτυχισμένα».

Σχετικά με το νόημα αυτών των λόγων του Πλάτωνα για την περιοδική μεταλλαγή των πραγμάτων στο επίγειο βασίλειο, πρέπει να παρατηρηθεί ότι όλα τα μέρη του σύμπαντος είναι ανίκανα να συμμετέχουν κατά τον ίδιο τρόπο στη θεία πρόνοια της θεότητας· κάποια από αυτά την απολαμβάνουν αιώνια και άλλα παροδικά· κάποια σε πρωταρχικό και άλλα σε δευτερεύοντα βαθμό. Διότι όντας το σύμπαν ένα τέλειο σύνολο, πρέπει να αποτελείται από ένα πρώτο, ένα μεσαίο και ένα τελευταίο μέρος. Αλλά τα πρώτα μέρη του, καθώς έχουν την πλέον έξοχη υπόσταση, πρέπει πάντοτε να υπάρχουν σύμφωνα προς τη φύση και τα τελευταία μέρη του πρέπει κάποιες φορές να υφίστανται σύμφωνα προς τη φύση και κάποιες φορές αντίθετα προς αυτή. Συνεπώς, τα ουράνια σώματα, τα οποία είναι τα πρώτα μέρη του σύμπαντος, υπάρχουν αιώνια σύμφωνα προς τη φύση, τόσο οι σφαίρες ολόκληρες, όσο και το μεγάλο πλήθος που συνεργάζεται με αυτές. Η μόνη μεταβολή που υφίστανται, είναι η μεταλλαγή σχήματος και η μεταβολή του φωτός σε διαφορετικές περιόδους. Αλλά στο επίγειο βασίλειο, ενώ οι σφαίρες των στοι-

χείων παραμένουν εξαιτίας της ύπαρξης τους ως σύνολα πάντοτε σύμφωνα προς τη φύση, τα μέρη αυτών των συνόλων έχουν κάποιες φορές μια φυσική και κάποιες φορές μια αφύσικη ύπαρξη· διότι μόνο κατά αυτόν τον τρόπο μπορεί ο κύκλος της γέννησης να αποκαλύψει όλη την ποικιλία που εμπεριέχει.

Οι διαφορετικές περίοδοι στις οποίες συμβαίνουν οι μεταλλαγές αυτές, ονομάζονται πολύ ορθά από τον Πλάτωνα περίοδοι *ευφορίας* και *αγονίας.* Γιατί στις περιόδους αυτές εκδηλώνεται η γονιμότητα ή η στειρότητα ανθρώπων, ζώων και φυτών έτσι ώστε στις γόνιμες περιόδους το ανθρώπινο είδος θα αυξηθεί περισσότερο αριθμητικά και συνολικά, θα είναι ανώτερο πνευματικά και σωματικά από τους ανθρώπους μιας άγονης περιόδου. Αντίστοιχη λογική πρέπει να επεκταθεί στα ζώα και τα φυτά. Η τόσο φημισμένη ηρωική εποχή ήταν αποτέλεσμα μιας από αυτές τις γόνιμες περιόδους, στην οποία οι άνθρωποι ξεπερνώντας το στάδιο της ανθρώπινης αγέλης ήταν αριθμητικά πολλοί και διέθεταν πνευματική αρετή

Όσον αφορά το επίθετο *θεία γεννητά,* σωστά παρατήρησε Έλληνας σχολιαστής ότι «ο Πλάτωνας δεν εννοεί με αυτό ούτε ολόκληρο τον κόσμο, μολονότι το επίθετο είναι πρωτίστως κατάλληλο σε αυτόν, ούτε μονάχα τα ουράνια βασίλεια, ούτε τον επίγειο κόσμο, αλλά *κάθε πράγμα το οποίο κινείται αιώνια και κυκλικά,* είτε στους ουρανούς, είτε κάτω από το φεγγάρι· εφόσον είναι υλικό, ονομάζεται *γεννητά* (διότι κανένα σώμα δεν είναι αυθύπαρκτο), αλλά εφόσον κινείται αιώνια, *θείο.* Διότι μιμείται το πιο θείο από τα πράγματα, αυτό που κατέχει μια ζωή που βρίσκεται πάντα σε εγρήγορση. Αλλά όσον αφορά τον τέλειο αριθμό που αναφέρεται εδώ από τον Πλάτωνα, εμείς δεν πρέπει μόνο να κατευθύνουμε την προσοχή μας σε έναν τέλειο αριθμό στην κοινή αριθμητική, -διότι αυτός είναι μάλλον αριθμούμενος παρά αριθμός, τείνει προς την τελειότητα και δεν είναι ποτέ τέλειος, καθώς βρίσκεται πάντοτε εν γενέσει- αλλά πρέπει να αναζητήσουμε την αιτία του αριθμού αυτού, που είναι

πραγματικά νοητός, αλλά συμπεριλαμβάνει το καθορισμένο όριο κάθε περιόδου του κόσμου».

Ας εξετάσουμε τώρα τι εννοεί ο Πλάτωνας με τις αυξήσεις δυνάμενες και δυναστευόμενες· με τους παράγοντες που ομοιώνουν και ανομοιώνουν, αυξάνουν και ελαττώνουν, προσήγορα και ρητά.

Οι δυνάμενες αυξήσεις είναι λόγοι μεγαλύτερης ανισότητας, δηλαδή όταν ο μεγαλύτερος συγκρίνεται με το μικρότερο, και είναι πολλαπλάσιοι, επιμόριοι, επιμερείς, πολλαπλασιεπιμόριοι και πολλαπλασιεπιμερείς. Αλλά πολλαπλάσιος είναι ο λόγος μιας μεγαλύτερης ποσότητας προς μία μικρότερη, την οποία περιέχει πολλές φορές· επιμόριος είναι ο λόγος της μεγαλύτερης ποσότητας προς μία μικρότερη, την οποία περιέχει ολόκληρη μια φορά και επιπλέον κάποιο μέρος της· και επιμερής είναι ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη, την οποία περιέχει ολόκληρη μια φορά και ομοίως κάποια μέρη αυτής. Πολλαπλασιεπιμόριος είναι ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη, την οποία περιέχει ολόκληρη πολλές φορές και κάποιο μέρος αυτής επιπλέον και πολλαπλασιεπιμερής είναι ο λόγος της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη, την οποία περιέχει ολόκληρη πολλές φορές και επίσης κάποια μέρη αυτής. Οι δυναστευόμενες αυξήσεις είναι λόγοι που εκφράζουν μικρότερη ανισότητα, δηλαδή όταν η μικρότερη συγκρίνεται με τη μεγαλύτερη ποσότητα· όπως για παράδειγμα, υποπολλαπλάσια, υπεπιμόριοι, υπεπιμερείς, καθώς και εκείνοι που συντίθενται από αυτούς τους τρεις. Οι αριθμοί *που ομοιώνουν και ανομοιώνουν* κατά τον Πλάτωνα ονομάζονται από τους μαθηματικούς *όμοιοι* και *ανόμοιοι.* Όμοιοι αριθμοί είναι εκείνοι που οι πλευρές τους είναι αναλογικές, ενώ ανόμοιοι αυτοί που οι πλευρές τους δεν είναι αναλογικές. Επίσης οι αριθμοί που αυξάνουν και ελαττώνουν κατά τον Πλάτωνα, ονομάζονται από τους μαθηματικούς *υπερτελείς* και *ελλιπείς,* ή υπερτέλειοι και ατελείς.

Τα πράγματα τα προσήγορα και ρητά είναι όρια που σχηματίζουν αντίστοιχα λόγο μεταξύ τους και μπορούν να εκφραστούν σε αριθμούς είτε ακέραιους, είτε κλασματικούς,

τέτοιους όπως αυτοί οι τέσσερις όροι ή όρια 27, 18, 12, 8, που σχηματίζουν ημιόλιο και υφημιόλιο λόγο· εφόσον αυτοί σχηματίζουν αντίστοιχα λόγο και είναι ρητοί. Διότι ρητές ποσότητες είναι εκείνες που μπορούν να εκφραστούν με α-κέραιους αριθμούς ή κλάσματα· και κατά όμοιο τρόπο, άρ-ρητες ποσότητες είναι αυτές που δεν μπορούν να εκφρα-στούν ούτε με ακέραιους αριθμούς ούτε με κλάσματα και ο-νομάζονται από τους σύγχρονους μαθηματικούς ασύμμετρες.

Ας δούμε τι καταλαβαίνουμε από το *η επίτριτη βάση τους αφού συνενωθεί με την πεντάδα και πολλαπλασιασθεί τρεις φορές, δίνει δύο αρμονίες.* Με τον όρο *επίτριτη βάση* ο Πλάτωνας εννοεί τον αριθμό 95. Γιατί ο αριθμός αυτός συντίθεται από την πρόσθεση του 25 -του αθροίσματος δη-λαδή των τετραγώνων των αριθμών 4 και 3, τα οποία σχημα-τίζουν τον πρώτο επίτριτο λόγο- με τον αριθμό 70, ο οποίος συντίθεται από το 40 και το 30, άρα αποτελείται από δυο αριθμούς που σχηματίζουν επίτριτο λόγο. Καθώς το 95 συ-ντίθεται από 25 και 70, μπορεί με μεγάλη ορθότητα να ονο-μαστεί επίτριτη βάση. Αν προσθέσουμε το 5 στον αριθμό αυ-τόν και τον υψώσουμε στο τετράγωνο και στον κύβο παράγει δέκα χιλιάδες και ένα εκατομμύριο, δηλαδή 100x 100= 10000 και 10000 x 100=1000000. Πρέπει να παρατηρηθεί ότι αυτοί οι δυο αριθμοί, όπως θα φανεί σύντομα, θεωρούνται από τον Πλάτωνα ανάλογοι με δυο παραλληλεπίπεδους. Ο πρώτος, δηλαδή ο δέκα χιλιάδες, σχηματίζεται από 10 x 10 x 100 και ο τελευταίος από 1000 x 10 x 100. Αυτοί οι δυο αριθμοί ονομάζονται από τον Πλάτωνα αρμονίες για τον ακόλουθο λόγο. Ο Σιμπλίκιος στο σχόλιο του πάνω στην πραγματεία του Αριστοτέλη *Περί Ουρανού* μας πληροφορεί ότι ο κύβος ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους *αρμονία*[21], επειδή αποτελείται από 12 ακμές, 8 γωνίες και έξι πλευρές· και τα 12, 8, και 6 βρίσκονται σε αρμονική αναλογία. Καθώς ένα παραλληλεπίπεδο λοιπόν έχει τον ίδιο αριθμό πλευρών, γωνιών και ακμών με τον κύβο, είναι προφανές γιατί οι α-ριθμοί 10000 και 1000000 ονομάζονται από τον Πλάτωνα αρ-μονίες. Έτσι επίσης γίνεται φανερό γιατί λέγει ότι «η άλλη

από αυτές τις αρμονίες (δηλαδή το ένα εκατομμύριο) είναι κατά τη μια φορά της ισομήκης και κατά την άλλη προμήκης». Διότι αν και στους δυο αριθμούς ονομάσουμε το πλάτος 100 και το ύψος 10, είναι φανερό ότι ο δεύτερος αριθμός, όταν εξετασθεί ως παραγόμενος από 1000 χ 10 χ 100, θα είναι ανάλογος προς ένα παραλληλεπίπεδο περισσότερο προμήκες από το προηγούμενο.

Επίσης, όταν λέει ότι «ο αριθμός 1000000 αποτελείται από εκατό αριθμούς ρητών διαμέτρων της πεντάδας, καθεμία ελαττωμένη κατά τη μονάδα, και από δυο που είναι άρρητοι, και από εκατό κύβους της τριάδας», το νόημα του είναι το ακόλουθο: Ο αριθμός 1000000 αποτελείται από εκατό αριθμούς (δηλαδή από εκατό τέτοιους αριθμούς όπως το 10000), που καθένας τους συντίθεται από ρητές διαμέτρους του πέντε. Αλλά για να το κατανοήσετε πλήρως, πρέπει να θυμηθείτε τα όσα αναφέρθηκαν στο Κεφ. XXXIV αυτού του βιβλίου, δηλαδή ότι υπάρχουν κάποιοι αριθμοί που ονομάζονται από τους μαθηματικούς ρητές διάμετροι. Αυτοί είναι επίσης δύο ειδών, γιατί κάποιοι είναι διάμετροι άρτιων και άλλοι περιττών τετράγωνων. Οι διάμετροι των ρητών άρτιων τετράγωνων, όταν πολλαπλασιάζονται με τους εαυτούς τους, παράγουν τετράγωνους αριθμούς, διπλάσιους των τετράγωνων των οποίων είναι διάμετροι, με έναν πλεονασμό της μονάδας. Για παράδειγμα, ο αριθμός 3 πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του παράγει 9, το οποίο είναι διπλάσιο του τετραγώνου 4, αυξημένο κατά τη μονάδα· επομένως το 3 θα είναι η διάμετρος του άρτιου τετράγωνου 4. Αλλά οι διάμετροι των ρητών περιττών τετράγωνων, είναι εν δυνάμει διπλάσιες των τετράγωνων στα οποία είναι διάμετροι, μειωμένες κατά μία μονάδα. Θέτοντας αυτό ως αρχή, συνάγεται ότι ο αριθμός 10000 θα αποτελείται από έναν κάποιο αριθμό επτάδων. Διότι το 7 είναι η ρητή διάμετρος του τετράγωνου αριθμού 25. Στη συνέχεια θα βρούμε ότι ο αριθμός αυτός είναι το 989.

Ο αριθμός 10000 όχι μόνον αποτελείται από 989 επτάδες, αλλά επίσης ο Πλάτωνας προσθέτει, «από δύο αριθμούς που είναι άρρητοι», δηλαδή από δύο αριθμούς που οι ρίζες τους

δεν μπορούν να βρεθούν, ούτε να εκφραστούν με ακρίβεια, είτε σε ακέραιους αριθμούς είτε σε κλάσματα, όπως είναι οι ρίζες των αριθμών 2 και 3. Οι αριθμοί 300 και 77 είναι επίσης αυτού του είδους· και όπως θα δούμε, φαίνεται ότι είναι οι αριθμοί που δηλώνονται από τον Πλάτωνα. Στο τέλος προσθέτει, «και από εκατό κύβους της τριάδας», δηλαδή από τον αριθμό 2700· γιατί αυτός ισούται με εκατό φορές το 27, τον κύβο του 3. Οι αριθμοί, επομένως, που σχηματίζουν το 10000, είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{array}{r} 989 \\ \underline{\quad 7} \\ 6923 \\ 300 \\ 77 \\ \underline{2700} \\ 10000 \end{array}$$

δηλαδή 989 επτάδες, δύο άρρητοι αριθμοί το 300 και το 77 και εκατό φορές ο κύβος του 3, δηλαδή το 2.700.

Άρα, ολόκληρος ο γεωμετρικός αριθμός είναι ένα εκατομμύριο.

Ο Ιάμβλιχος αποκαλεί αυτόν τον αριθμό *γαμικό αριθμό* και αναφέρει στο *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής:* «Αυτό το παράδειγμα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε το γαμικό αριθμό στην Πολιτεία του Πλάτωνα. Διότι εκεί λέει ότι από δυο γονείς αγαθούς θα γεννηθεί ένας καθόλα αγαθός γόνος· αλλά το αντίθετο από την ένωση δυο αντίθετων χαρακτήρων. Από την ένωση κακού και αγαθού γονέα ο γόνος θα είναι από κάθε άποψη κακός και ποτέ αγαθός. Διότι από τη σύνδεση περιττών αριθμών μεταξύ τους, με την πρόσθεση της μονάδας, η οποία στη σύνθεση προηγείται αυτών, παράγονται οι τετράγωνοι αριθμοί, οι οποίοι επειδή παράγονται από τέτοιους αριθμούς μετέχουν της φύσης του αγαθού. Αιτία δε τούτου είναι η ισότητα και προηγείται αυτής το *ένα.* Από τη σύνδεση όμως άρτιων αριθμών,

με τη δυάδα να ηγείται, παράγονται αριθμοί ετερομήκεις που έχουν αντίθετη φύση, διότι τέτοιοι ακριβώς είναι και οι γεννήτορες τους. Αιτία δε τούτου είναι η ανισότητα και προηγείται αυτής η αόριστη δυάδα. Και εάν μία μίξη πρέπει να γίνει, σαν ένα πάντρεμα του άρτιου με τον περιττό, ο γόνος θα συμμετέχει στη φύση και των δυο, είτε οι γεννήτορες του διαφέρουν κατά τη μονάδα, είτε κατά κάποιον μεγαλύτερο αριθμό. Διότι οι παραγόμενοι αριθμοί είναι είτε ετερομήκεις είτε προμήκεις. Από τετράγωνους αριθμούς αναμεμιγμένους μεταξύ τους γεννιούνται οι τετράγωνοι, από ετερομήκεις παράγονται αριθμοί όμοιοι προς αυτούς, αλλά από μικτούς αριθμούς ποτέ δε γεννιούνται τετράγωνοι, αλλά αριθμοί που είναι εντελώς ετερογενείς. Αυτό λέει ο θείος Πλάτωνας σχετικά με τους αρσενικούς και τους θηλυκούς άρχοντες στην Πολιτεία του, ότι δηλαδή, όταν δεν έχουν ανατραφεί με τις μαθηματικές επιστήμες, ή αν και έχουν ανατραφεί με αυτές, έλθουν σε γάμου κοινωνία με τρόπο σύγχυσης και αταξίας, θα γεννήσουν απόγονους εξαχρειωμένους, οι οποίοι θα είναι η αρχή της οχλαγωγίας και της διχόνοιας σε ολόκληρη την πολιτεία».

Παίρνουμε λοιπόν μια σειρά από τετράγωνους αριθμούς αρχίζοντας από τη μονάδα και κάτω από αυτούς μια σειρά από ετερομήκεις αριθμούς αρχίζοντας από τη δυάδα ή δύο, όπως παρακάτω:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

Αν το 2 συγκριθεί με το 1, ο λόγος είναι δύο προς ένα και είναι η ρίζα αυτού του λόγου. Αλλά ο λόγος του 6 προς το 4 είναι ημιόλιος και του 12 προς το 9 επίτριτος. Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο θα βρεθεί ο επιμόριος λόγος, ο επιτέταρτος, ο επίπεμπτος και άλλοι, των οποίων οι διαφορές θα υπερβαίνουν η μια την άλλη κατά τη μονάδα.

Διότι η διαφορά ανάμεσα στο 2 και το 1 είναι 1, ανάμεσα στο 6 και το 4 είναι 2, ανάμεσα στο 12 και το 9 είναι 3, και ούτω καθεξής. Η αύξηση θα είναι πάντοτε η μονάδα.

Στη συνέχεια, αν οι όροι της μιας ακολουθίας συγκριθούν μεταξύ τους, θα βρεθεί ότι οι τετράγωνοι αριθμοί διαφέρουν ο ένας από τον άλλο, όταν εξετασθούν σε συνεχή σειρά, κατά 3. Η διαφορά όμως ανάμεσα στους ετερομήκεις αριθμούς είναι 4.

Ο λόγος της διαφοράς δύο ετερομηκών αριθμών προς τη διαφορά δυο τετράγωνων είναι επιμόριος· αλλά αυτοί οι λόγοι έχουν μόνο τις ονομασίες που αναφέρονται σε περιττούς αριθμούς. Για παράδειγμα, η διαφορά ανάμεσα στο 6 και το 2 είναι 4, αλλά η διαφορά ανάμεσα στο 4 και το 1 είναι 3, επομένως ο λόγος της διαφοράς 4 προς τη διαφορά 3 είναι επίτριτος. Άλλο παράδειγμα, η διαφορά ανάμεσα στο 12 και το 6 και ανάμεσα στο 9 και το 4 είναι 5, επομένως ο λόγος της διαφοράς 6 προς τη διαφορά 5 είναι επίπεμπτος. Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες διαφορές.

Οι αριθμοί που γεννιούνται από τον πρώτο όμοιο, δηλαδή τον τετράγωνο 4, είναι όλοι όμοιοι και τετράγωνοι. Έτσι 4 φορές το 4 είναι 16, 4 φορές το 9 είναι 36, 4 φορές το 16 είναι 64, που όλοι τους είναι τετράγωνοι αριθμοί και όμοιας φύσης. Αντίθετα, οι αριθμοί που γεννιούνται από ανόμοιους όρους, είναι όλοι ανόμοιοι, όπως το 12 το οποίο γεννιέται από το 2 και το 6, το 72 που γεννιέται από το 6 και το 12, και το ίδιο και για τους υπόλοιπους. Ο αριθμός που παράγεται από τον πολλαπλασιασμό του ανόμοιου αριθμού 6 με τον όμοιο αριθμό 4, είναι ο ανόμοιος προμήκης 24 και ανήκει στην τάξη των φαύλων αριθμών[22].

Στους γνώμονες των τετράγωνων και τους γνώμονες των ετερομηκών αριθμών η ακόλουθη αναλογία παρουσιάζεται:

1	3	5	7	9	11	13	15
2	4	6	8	10	12	14	16

Αν εξετασθούν τρεις γνώμονες τετράγωνων, 1, 3, 5, το άθροισμα τους είναι 9 και το άθροισμα των γνωμόνων 2 και 4 -δύο ετερομηκών αριθμών- είναι 6· ο λόγος του 6 προς το 9 είναι υφημιόλιος. Αν εξετασθούν τέσσερις γνώμονες τετράγωνων, 1, 3, 5, 7, το άθροισμα τους είναι 16, και το άθροισμα των τριών γνωμόνων 2, 4, και 6 -ετερομήκεις αριθμοί-

είναι 12· ο λόγος του 16 προς το 12 είναι επίτριτος. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, οι άλλοι λόγοι θα είναι επιτέταρτος, επίπεμπτος, κ.λπ.

Αν συγκριθούν οι τετράγωνοι με τους ενδιάμεσους αυτών ετερομήκεις αριθμούς, ο λόγος της πρώτης αναλογίας είναι δύο προς ένα, δηλαδή 1, 2, 4· της δεύτερης αναλογίας 4, 6, 9, είναι ημιόλιος· της τρίτης 9, 12, 16, είναι επίτριτος, και ούτω καθεξής.

Αλλά αν οι ετερομήκεις αριθμοί συγκριθούν με τους ενδιάμεσους αυτών τετράγωνους, οι λόγοι θα βρεθούν να είναι συναφείς και συναρτημένοι, δηλαδή ο λόγος δύο προς ένα με τον ημιόλιο, όπως στους 2, 4, 6· ο ημιόλιος με τον επίτριτο, όπως στους 6, 9, 12· ο επίτριτος με τον επιτέταρτο, όπως στους 12, 16, 20, και ούτω καθεξής. Επιπλέον, κάθε τετράγωνος και όμοιος αριθμός, με έναν υποκείμενο ετερομήκη και ανόμοιο αριθμό, παράγει έναν τριγωνικό αριθμό. Έτσι $1+2=3$, $4+6=10$, $9+12=21$, κ.λπ., των οποίων όλα τα αθροίσματα είναι τριγωνικοί αριθμοί. Ομοίως, αν ο πρώτος ανόμοιος προστεθεί στο δεύτερο όμοιο αριθμό, ή ο δεύτερος ανόμοιος στον τρίτο όμοιο αριθμό, τα αθροίσματα θα είναι επίσης τριγωνικοί αριθμοί. Έτσι $2+4=6$, $6+9=15$, $12+16=28$, κ.λπ. Αναφερθήκαμε λοιπόν επαρκώς σε όσα λέει ο Ιάμβλιχος σχετικά με το γαμικό αριθμό.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Προφανώς αναφέρεται στο σημείο εκείνο του *Τίμαιου* όπου εκτίθεται ο τρόπος δημιουργίας της ψυχής (34c-36d) (Σ.τ.μ.)
2. Ο αριθμός 5 σε όλους τους πολλαπλασιασμούς με τον εαυτό του έχει πάντοτε το 2 να προηγείται του τελευταίου ψηφίου· και το 6 στους πολλαπλασιασμούς με τον εαυτό του παρουσιάζει τα 1, 3, 5, 7, ή το 9 να προηγούνται του τελευταίου ψηφίου, όπως γίνεται φανερό στους ακόλουθους αριθμούς: 36, 216, 1296, 7776, 46656, 279936, 1679616, κ.λπ.
3. Η αναλογία έχει οριστεί με περισσότερη ακρίβεια από τον Πρόκλο στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιο* ως η ταυτότητα του λόγου και ο πλέον υπέροχος των δεσμών.
4. Σχετικά με αυτούς τους τρεις μέσους, τον αριθμητικό, το γεωμετρικό και τον αρμονικό, ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιο,* σελ. 238, παρατηρεί ότι «έχουν σχέση με τις τρεις κόρες της Θέμιδας, δηλαδή την Ευνομία, τη Δίκη και την Ειρήνη. Πράγματι, ο αριθμητικός μέσος σχετίζεται με την Ειρήνη, επειδή υπερβαίνει και υπερβαίνεται από μια ίση ποσότητα, τον χρησιμοποιούμε στις συναλλαγές μας κατά τον καιρό της ειρήνης και μέσω αυτού ομοίως τα στοιχεία βρίσκονται εν ηρεμία. Ο γεωμετρικός μέσος έχει σχέση με την Ευνομία ή *δίκαιη νομοθεσία,* την οποία ο Πλάτωνας ονομάζει και κρίση του Δία, μέσω της οποίας το σύμπαν κοσμείται με γεωμετρικές αναλογίες. Ο αρμονικός μέσος έχει σχέση με τη Δίκη ή Δικαιοσύνη, μέσω της οποίας οι μεγαλύτεροι όροι έχουν ένα μεγαλύτερο, αλλά οι μικρότεροι ένα μικρότερο λόγο.»

   Επίσης, ο γεωμετρικός μέσος συμπεριλαμβάνει τους άλλους δύο. Ας πάρουμε οποιουσδήποτε τρεις όρους με αριθμητική αναλογία, για παράδειγμα τους 1, 2, 3, και ας προσθέσουμε έναν

τέταρτο όρο με τον οποίο θα βρεθούν και οι τέσσερις σε γεωμετρική αναλογία. Αυτός ο τέταρτος όρος θα είναι το 6. Γιατί 1:2 = 3:6. Αυτή η αναλογία, επομένως, θα συμπεριλαμβάνει τόσο την αριθμητική όσο και την αρμονική αναλογία, εφόσον τα 2, 3 και 6 βρίσκονται σε αρμονική και τα 1, 2, 3 σε αριθμητική αναλογία.

5. Έτσι 4 x 9 = 36, που είναι ένας τετράγωνος αριθμός, ή 9 x 16= 144, που είναι επίσης ένας τετράγωνος αριθμός.
6. Έτσι 2x4=8, ένας προμήκης αριθμός. Επίσης το 6, που είναι ένας ετερομήκης αριθμός, πολλαπλασιαζόμενο με το 9, ισούται με το 54, έναν προμήκη αριθμό.
7. Έτσι 8x27 = 216, ένας κυβικός αριθμός με ρίζα το 6. Επίσης, 8 χ 64=512, ένας κυβικός αριθμός με ρίζα το 8.
8. Έτσι 2x8=16, που δεν είναι κύβος. Επίσης, 6 x27=162, ένας μη κυβικός αριθμός.
9. Ετσι 6x6=36, ένας άρτιος αριθμός. Και 8x8=64, πάλι άρτιος αριθμός.
10. Έτσι 3 x 5 = 15 και 7 χ 9 = 63, που και οι δύο είναι περιττοί αριθμοί.
11. Ετσι 5x4=20 και 6x9=54, που και οι δύο είναι άρτιοι αριθμοί.
12. Δηλαδή το 8 υπερβαίνει το 6 κατά 2, το οποίο είναι το 1/3 του 6. Αλλά το 2 υπερβαίνει το 8 κατά 4, το οποίο είναι το 1/3 του 12 (Σ.τ.μ.)
13. Ο Τζορντάνο Μπρούνο έχει προσθέσει ακόμη μία στις αναλογίες αυτές, την ενδέκατη. Αυτή είναι όταν σε τρεις όρους, ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μέσο όρο ισούται με το λόγο της διαφοράς των άκρων προς τη διαφορά των μεγαλύτερων όριον όπως είναι στους 6, 4, 3. Διότι ο λόγος του 6 προς το 4 ισούται με το λόγο της διαφοράς του 6 από το 3, δηλαδή του 3, προς τη διαφορά του 6 από το 4, δηλαδή προς το 2.
14. Διότι το 8 προς το 12, που είναι δια πέντε, συντίθεται από 8 προς 9 και 9 προς 12· έτσι ομοίως 6:9 = 6:8 + 8:9.
15. Βλ. Θέων Σμυρναίος, Μαθηματικά, σελ. 67.

16. Διότι σε ένα τετράγωνο σχήμα, το τετράγωνο της διαγωνίου είναι δυο φορές το τετράγωνο της μιας από τις πλευρές του, από 47.1, του Ευκλείδη.

17. Ρητές ποσότητες είναι αυτές που μπορούν να εκφραστούν είτε σε ακέραιους αριθμούς, είτε σε κλάσματα.

18. «Ο Σκούτεν (Schooten) δίνει τον παρακάτω πρακτικό κανόνα από τον Ντεκάρτ (Descartes) για την εύρεση των φίλιων αριθμών. Υποθέσετε τον αριθμό 2, ή κάποια δύναμη του αριθμού 2, τέτοια που αν η μονάδα αφαιρεθεί από καθεμία από αυτές τις τρεις ακόλουθες ποσότητες, δηλαδή από το τριπλάσιο του υποθετικού αριθμού, από το εξαπλάσιο του υποθετικού και από το δεκαοκταπλάσιο του τετραγώνου του υποθετικού αριθμού, τα τρία υπόλοιπα να είναι όλα πρώτοι αριθμοί. Στη συνέχεια, ο τελευταίος από τους πρώτους αριθμούς πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το διπλάσιο του υποθετικού αριθμού και το γινόμενο θα είναι ένας από τους ζητούμενους φίλιους αριθμούς, ενώ το άθροισμα των υποπολλαπλάσιων μερών του θα είναι ο άλλος». *Μαθηματικό Λεξικό* του Χάτον (Hutton).

    Αυτή επίσης είναι η μέθοδος του Οζανάμ για την εύρεση των φίλιων αριθμών, που έχουμε ήδη δώσει και διευκρινήσει με παραδείγματα. Ο κ. Τζον Γκοχ (John Gough) δείχνει ότι αν ένα ζευγάρι φίλιων αριθμών διαιρεθεί με το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους, και οι πρώτοι διαιρέτες των πηλίκων αυτών αυξηθούν ξεχωριστά κατά τη μονάδα, τα γινόμενα των δύο συνόλων που αυξήθηκαν έτσι, θα είναι ίσα.

19. Η πρόταση αυτή αποδόθηκε έτσι βάσει του αγγλικού κειμένου: "...when the revolutions of the heavenly bodies complete the periphery of their respective orbits, which are shorter, to the shorter lived, and contrary wise to such as are the contrary." Το αντίστοιχο αρχαίο κείμενο είναι: «όταν περιτροπαί εκάστοις κύκλων περιφοράς συνάπτωσι, βραχυβίοις μεν βραχυπόρους, εναντίοις δε εναντίας», το οποίο αποδίδεται: «όταν κάθε είδος τελειώνει και ξαναρχίζει τον κύκλο της εξέλιξης του που άλλοτε είναι βραχύτερος και άλλοτε μακρότερος, ανάλογα με τη διάρκεια ζωής του κάθε είδους» [*Πολιτεία* Πλάτωνα, πρόλογος Ευάγ. Παπανούτσος, μετάφραση Ιωαν. Γρυπάρη]. (Σ.τ.μ.)

20. Στο σημείο αυτό η μετάφραση ακολουθεί το αγγλικό κείμενο. Στις ελληνικές μεταφράσεις που κυκλοφορούν η συγκεκριμένη ημιπερίοδος αποδίδεται ως εξής: «... η άλλη κατά τη μια φορά της είναι ισομήκης, και κατά την άλλη προμήκης κι έτσι έχουμε

από το ένα μέρος εκατό φορές το τετράγωνο των ρητών διαγωνίων του πέντε, ελαττωμένο κατά ένα, ή το τετράγωνο των άρρητων διαγωνίων, ελαττωμένο κατά δύο, από το άλλο πάλι μέρος εκατό κύβους της τριάδας.» (Σ.τ.μ.)

21. Βλέπε Κεφ. XXVIII του ίδιου βιβλίου.

22. Αγαθοί αριθμοί, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, είναι αυτοί που υπάρχουν πάντοτε κατά τον ίδιο τρόπο και διατηρούν μια ισότητα· τέτοιοι είναι οι τετράγωνοι αριθμοί που γεννιούνται από περιττούς γνώμονες και τοποθετούνται από τον Πυθαγόρα στη σειρά των πραγμάτων που είναι αγαθά. Φαύλοι αριθμοί είναι οι ετερομήκεις και οι προμήκεις. Από αγαθούς λοιπόν αριθμούς αγαθοί αριθμοί παράγονται. Έτσι από το 3 πολλαπλασιαζόμενο με τον εαυτό του, ο τετράγωνος αριθμός 9 παράγεται· από το 4, ο τετράγωνος 16· και από το 5, ο τετράγωνος 25, που επίσης παράγονται από περίθεση περιττών γνωμόνων. Αλλά από τον πολλαπλασιασμό του 3 και του 4, δηλαδή από τη συνένωση του αγαθού και του φαύλου, παράγεται το 12, ο οποίος είναι ετερομήκης αριθμός και επομένως φαύλος. Το ίδιο και σε άλλα παραδείγματα.

ΒΙΒΛΙΟ ΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Η φιλοσοφική μέθοδος των Πυθαγορείων - σχετικά με τους αριθμούς.

Οι Πυθαγόρειοι, παρακάμπτοντας τα μονοπάτια των αδαών και παραδίδοντας τη φιλοσοφία τους με μυστικότητα σε εκείνους μονάχα που ήταν άξιοι να τη λάβουν, την παρουσίασαν σε αυτούς με μαθηματικούς όρους. Έτσι αποκάλεσαν τις μορφές αριθμούς, επειδή πρόκειται για τα αρχικώς αποχωριζόμενα τμήματα μιας αδιαίρετης μονάδας· διότι οι φύσεις που είναι υπεράνω μορφών, είναι υπεράνω διαχωρισμού[1]. Το καθ' όλα τέλειο πλήθος των μορφών, επομένως, υποδήλωσαν ασαφώς μέσω της δυάδας· αλλά υπέδειξαν πως οι πρώτες μορφικές αρχές, που όρισαν ως μονάδα και δυάδα, δεν είναι αριθμοί· ενώ η πρώτη τριάδα και τετράδα είναι οι πρώτοι αριθμοί, η μία περιττή και η άλλη άρτια· με την πρόσθεση όλων γεννιέται η δεκάδα, καθώς το άθροισμα των 1, 2, 3 και 4, είναι δέκα. Πέρα από τους αριθμούς, σε δευτερογενείς και πολυποίκιλες ζωές, τα γεωμετρικά μεγέθη προηγούνται των φυσικών επίσης, ανέφεραν ότι οι αριθμοί είναι οι ουσιώδεις αιτίες και αρχές αυτών. Θεώρησαν το σημείο ως αδιαίρετο από τη μονάδα, ενώ τη γραμμή ως το πρώτο διάστημα που αποδίδεται στη δυάδα· κατ' ακολουθία, η επιφάνεια συνδέεται με την τριάδα και το στερεό με την τετράδα.

Επίσης ονόμαζαν, σύμφωνα με τη μαρτυρία του Αριστοτέλη, το πρώτο μήκος δυάδα· διότι δεν είναι απλώς μήκος,

αλλά το *πρώτο* μήκος, υποδηλώνοντας κατ' αυτό τον τρόπο την *αιτία.* Κατά έναν όμοιο τρόπο ονόμασαν το *πρώτο* πλάτος τριάδα και το *πρώτο* ύψος τετράδα. Αναφέρθηκαν επίσης στις βασικές αρχές όλης της ψυχικής γνώσης. Τη διανοητική γνώση, βεβαίως, επειδή συνδέεται με την αδιάσπαστη ενότητα, τη συσχέτισαν με τη μονάδα· αντίθετα την επιστημονική γνώση, επειδή εξελίσσεται και προχωρά από την αιτία στο αιτιατό μέσω των σταθερών και αμετάβλητων πραγμάτων, τη συσχέτισαν με τη δυάδα· και τη γνώμη με την τριάδα, επειδή η δύναμή της δεν κατευθύνεται πάντοτε στο ίδιο πράγμα, αλλά άλλοτε ρέπει προς την αλήθεια και άλλοτε προς το λάθος. Συσχέτισαν δε την αίσθηση με την τετράδα, διότι αυτή έχει αντίληψη των σωμάτων. Γιατί είναι γεγονός πως στη δυάδα υπάρχει ένα διάστημα από τη μια μονάδα ως την άλλη, ενώ στην τριάδα υπάρχουν δυο διαστήματα από τη μια μονάδα προς τις επόμενες και στην τετράδα υπάρχουν τρία. Συσχέτισαν, επομένως, με τις αρχές κάθε πράγμα γνωστό, δηλαδή τα όντα και τις γνωστικές δυνάμεις αυτών. Διαχώρισαν όμως τα όντα, όχι σύμφωνα με το πλάτος, αλλά σύμφωνα με το ύψος, σε νοητά, αντικείμενα της επιστήμης, αντικείμενα της γνώμης και αισθητά. Αντίστοιχα χώρισαν τη γνώση σε διάνοια, επιστήμη, γνώμη και αίσθηση. Το άκρο επομένως της νοητής τριάδας, ή το ίδιο το ζώο, όπως ονομάζεται από τον Πλάτωνα στον *Τίμαιο,* εκλαμβάνεται από το χωρισμό των αντικειμένων γνώσης, εκδηλώνοντας τη νοητή τάξη στην οποία περιέχονται οι ίδιες οι μορφές, δηλαδή οι πρώτες μορφές και οι αρχές τους, η ιδέα του ίδιου του ένα, του πρώτου μήκους, που είναι η ίδια η δυάδα, καθώς και οι ιδέες του πρώτου πλάτους και του πρώτου ύψους (διότι ο όρος *πρώτος* ταιριάζει σε όλα αυτά), δηλαδή η ίδια η τριάδα και η τετράδα αντιστοίχως.

Οι Πυθαγόρειοι και ο Πλάτωνας δεν ονόμασαν την ιδέα από ένα πράγμα και τον ιδεατό αριθμό από ένα διαφορετικό. Εφόσον ο ισχυρισμός ότι όλα τα πράγματα μοιάζουν με τους αριθμούς είναι κατ' εξοχήν αληθινός, είναι φανερό ότι ο αριθμός -και ιδιαίτερα κάθε ιδεατός αριθμός- ονομάστηκε έτσι εξαιτίας της παραδειγματικής ιδιαιτερότητάς του. Αν

όμως κάποιος θελήσει να το κατανοήσει αυτό από την ίδια την ονομασία, είναι εύκολο να συμπεράνει ότι η ιδέα ονομάστηκε έτσι εξαιτίας της όμοιας προς αυτή αναπαράστασης των συμμετεχόντων και της απόδοσης σε αυτούς *μορφής, τάξης, ομορφιάς* και *ενότητας·* και αυτό σε ακολουθία με την αιώνια διατήρηση της ίδιας μορφής, διευρύνοντας την ίδια της τη δύναμη στο άπειρο των μερικών και διερευνώντας με το ίδιο είδος τα αιώνια συμμετέχοντα σε αυτήν. Η ονομασία *αριθμός* δόθηκε επειδή παρέχει αναλογία και εύρυθμη διάταξη σε όλα τα πράγματα, Σύμφωνα με τη μαρτυρία του Συριανού[2] οι αρχαίοι απέδιδαν την έννοια συναρμόζω και συνθέτω με το ρήμα *αραρίσκω* (απρμφ. *άρσαι),* από το οποίο προέρχεται ο αριθμός. Οπότε ανάρσιον οι Έλληνες αποκαλούσαν το ασύνθετο. Μάλιστα υπάρχουν και διάφορες ελληνικές εκφράσεις όπως, *θα συναρμόσει το ζυγό, έθεσαν τον αριθμό μαζί τους* και *αριθμός και φιλία.* Για αυτό το λόγο υιοθέτησαν οι Έλληνες την ονομασία *αριθμός,* καθώς μετράει και θέτει σε κανονική διάταξη όλα τα πράγματα, και τα ενώνει σε φιλική συμμαχία.

Επιπλέον, κάποιοι από τους Πυθαγόρειους πραγματεύθηκαν μόνο τους αδιαχώριστους αριθμούς, δηλαδή τους αριθμούς που δε διαχωρίστηκαν από τις επίγειες φύσεις, ενώ κάποιοι άλλοι αυτούς που υφίστανται χωριστά από το σύμπαν, στους οποίους είδαν να περιέχονται ως υπόδειγμα εκείνοι οι αριθμοί που τελειοποιούνται από τη φύση. Άλλοι, κάνοντας διάκριση ανάμεσα στους δυο, αφηγήθηκαν το δόγμα τους με έναν περισσότερο σαφή και τέλειο τρόπο. Αν είναι όμως αναγκαίο να μιλήσουμε σχετικά με τη διαφορά αυτών των μονάδων και την έλλειψη διαφοράς τους, πρέπει να πούμε ότι οι μονάδες που υπάρχουν σε ποσότητα δεν πρόκειται με κανένα τρόπο να επεκταθούν σε ουσιώδεις αριθμούς. Όταν όμως ονομάζουμε ουσιώδεις αριθμούς τις μονάδες, πρέπει να βεβαιώσουμε ότι όλες τους απέχουν αμοιβαία μεταξύ τους εξαιτίας της ίδιας της *διαφοράς* και ότι στερούνται διαφοράς εξαιτίας της *ομοιότητας.* Είναι επίσης φανερό ότι αυτές που ανήκουν στην ίδια τάξη, περιέχονται μέσω αμοιβαίας

σύγκρισης περισσότερο στην *ομοιότητα* παρά στη διαφορά, ενώ εκείνες που βρίσκονται σε διαφορετικές τάξεις, αναφέρονται κυρίως στην ανομοιότητα μέσω της κυριαρχίας της *διαφοράς*.

Επιπροσθέτως, οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι η φύση παράγει τα αισθητά από τους αριθμούς· αυτοί όμως οι αριθμοί δεν ήταν μαθηματικοί, αλλά φυσικοί· και καθώς μιλούσαν συμβολικά, δεν είναι απίθανο να εξηγούσαν κάθε ιδιότητα των αισθητών με μαθηματικούς όρους. Εν τούτοις, λέει ο Συριανός, το να θεωρήσουμε ότι οι Πυθαγόρειοι κατείχαν μόνο τη γνώση των αισθητών αριθμών, δεν είναι μόνο γελοίο, αλλά και ασεβές. Διότι αυτοί όντως έλαβαν από τη θεολογία του Ορφέα τις αρχές των νοητών και διανοητικών αριθμών, τους προσέδωσαν πλούσια ανάπτυξη και επέκτειναν την επικράτεια τους μέχρι τα ίδια τα αισθητά. Έτσι έμεινε χαρακτηριστικό των Πυθαγορείων το ρητό, *«όλα τα πράγματα εξομοιώνονται με τον αριθμό».* Για αυτό ο Πυθαγόρας στον *Ιερό Λόγο* λέει με σαφήνεια ότι «αριθμός είναι ο κυβερνήτης των μορφών και των ιδεών και είναι η αιτία θεών και δαιμόνων». Επίσης υποθέτει ότι *για τον αρχαιότατο και με τέχνη κυβερνώντα θεό, ο αριθμός είναι ο κανόνας και ο τεχνικός λόγος, και η διάνοια και η μη παρεκκλίνουσα ισορροπία της σύνθεσης και γένεσης όλων των πραγμάτων».* (Αυτός μεν Πυθαγόρας, έν τώ ιερώ λόγω, διαρρήδην μορφών και ιδεών κράντορα τον αριθμόν έλεγεν είναι, και θεών και δαιμόνων αίτιον και τώ πρεσβυτάτω και κρατιστεύοντι τεχνίτη θεώ κανόνα, καί λόγον τεχνικόν, νουν τε και σταθμάν ακλινέσταταν τον αριθμόν υπείκε συστάσιος και γενέσεως των πάντων.)

Ο Συριανός προσθέτει: «Και ο Φιλόλαος διακήρυξε ότι ο αριθμός είναι ο κυβερνών και αυτογέννητος δεσμός της αιώνιας διατήρησης των επίγειων φύσεων». (Φιλόλαος δέ, της των κοσμικών αιωνίας διαμονής την κρατιστεύουοαν και αυτογενή συνοχήν είναι απεφήνατο τον αριθμόν.) «Και ο Ίππασος, και όλοι εκείνοι που προορίζονταν για την πενταετή σιωπή, ονόμαζαν τον αριθμό όργανο του δημιουργού του σύμπαντος ικανό να κρίνει, και το πρώτο παράδειγμα της επίγειας δημιουργίας».

(ΟΙ δέ περί Ίππασον ακουσματικοί είπον κριτικόν κοσμουργού θεού όργανον, και, παράδειγμα πρώτον κοσμοποιΐας.) Πώς θα ήταν δυνατόν επομένως να μιλήσουν με τόσο θαυμάσια λόγια για τον αριθμό, αν δε θεωρούσαν ότι κατέχει μια ουσία χωριστή από τις αισθήσεις και μια δημιουργική υπερβατικότητα, που είναι ταυτόχρονα και παραδειγματική;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

Σχετικά με το μαθηματικό και το φυσικό αριθμό.

Όπως σε κάθε πράγμα, συμφωνά με το δόγμα του Αριστοτέλη, ένα μέρος αντιστοιχεί στην ύλη και ένα άλλο στη μορφή, έτσι και σε κάθε αριθμό˙ όπως για παράδειγμα στην πεντάδα, οι πέντε μονάδες της, δηλαδή η ποσότητά της, και ο αριθμός που είναι το υποκείμενο συμμετοχής πηγάζουν από την ίδια τη δυάδα˙ αλλά η μορφή της, δηλαδή η ίδια η πεντάδα, προέρχεται από τη μονάδα˙ διότι κάθε μορφή είναι μια μονάδα και ενώνει την υποκείμενη της ποσότητα. Η πεντάδα η ίδια, επομένως, ως μονάδα, προερχόμενη από την αρχική μονάδα, αυτή που κατατάσσεται ως η ύψιστη αρχή μετά το *άρρητο ένα,* συγκροτεί την υποκείμενη ποσότητα της, η οποία είναι άμορφη, και τη συνδέει με τη δική της μορφή. Διότι υπάρχουν δύο αρχές μαθηματικών αριθμών στις ψυχές μας˙ η μονάδα, που περικλείει μέσα της όλες τις μορφές των αριθμών και αντιστοιχεί με τη μονάδα στις διανοητικές φύσεις, και η δυάδα, που είναι μια γενεσιουργός αρχή άπειρης δύναμης και που -όντας η εικόνα της ανεξάντλητης και νοητής δυάδας- καλείται αόριστη. Ενόσω αυτή προχωρά σε όλα τα πράγματα, δεν εγκαταλείπεται στην πορεία της από τη μονάδα, αλλά εκείνο που απορρέει από τη μονάδα συνεχώς διακρίνει και σχηματίζει την απεριόριστη ποσότητα, δίνει ιδιαίτερο προορισμό σε όλες τις κανονικές προόδους της και ακατάπαυστα τις κοσμεί με μορφές. Όπως ακριβώς στις εγκόσμιες φύσεις δεν υπάρχει τίποτε άμορφο,

ούτε κανένα κενό ανάμεσα στα είδη των πραγμάτων, ομοίως στο μαθηματικό αριθμό δεν υπάρχει ποσότητα μη αριθμητή, διότι έτσι η μορφοποιητική δύναμη της μονάδας θα αφανιζόταν από την αόριστη δυάδα, ούτε κάποιο ενδιάμεσο παρεμβαίνει στην ακολουθία των αριθμών και την καλώς διατεθειμένη ενέργεια της μονάδας.

Η πεντάδα, επομένως, δεν αποτελείται από ουσία και ιδιότητες, όπως ένας λευκός άνθρωπος· ούτε από γένος και διαφορά, όπως ο άνθρωπος και τα δίποδα ζώα· ούτε από πέντε μονάδες που άπτονται μεταξύ τους, σαν ένα δεμάτι ξύλα· ούτε από πράγματα αναμεμιγμένα, σαν ένα ποτό φτιαγμένο από κρασί και μέλι· ούτε από πράγματα που κατέχουν θέση, όπως οι πέτρες που με την τοποθέτησή τους ολοκληρώνουν το σπίτι· ούτε, τέλος, είναι σαν τα αριθμητά πράγματα, διότι αυτά δεν είναι τίποτε άλλο από μερικά. Αλλά αυτό δε συνεπάγεται πως οι ίδιοι οι αριθμοί, επειδή αποτελούνται από αδιαίρετες μονάδες, δεν έχουν τίποτε άλλο εκτός από μονάδες (διότι το πλήθος των σημείων σε συνεχή ποσότητα είναι αδιαίρετο, αυτό όμως δε σημαίνει ότι ολοκληρώνεται κάτι άλλο εκτός από τα ίδια τα σημεία). Τούτο συμβαίνει επειδή υπάρχει κάτι σε εκείνους που αντιστοιχεί σε ύλη και κάτι που αντιστοιχεί σε μορφή. Τέλος, όταν ενώνουμε την τριάδα με την τετράδα, λέμε ότι φτιάχνουμε το επτά. Ο ισχυρισμός όμως δεν είναι αληθινός· διότι μονάδες συνδεδεμένες με μονάδες παράγουν πραγματικά το υποκείμενο του αριθμού 7, αλλά τίποτε περισσότερο. Τότε ποιος προσδίδει την επταδική μορφή σε αυτές τις μονάδες; Ποιος είναι επίσης που δίνει τη μορφή ενός κρεβατιού σε έναν αριθμό από κομμάτια ξύλου; Δεν είναι η ψυχή του ξυλουργού, μέσω της τέχνης που αυτός κατέχει, που δουλεύει το ξύλο ώστε να λάβει τη μορφή ενός κρεβατιού, και δεν είναι η επιτήδεια προς το αριθμείν ψυχή, η εμπεριέχουσα τη μονάδα ως σχέση αρχής, που δίνει μορφή και ύπαρξη σε όλους τους αριθμούς; Αλλά η διαφορά είναι πως η τέχνη του ξυλουργού δεν είναι έμφυτη σε εμάς και απαιτεί χειρωνακτική εργασία, διότι σχετίζεται με την αισθητή ύλη, ενώ η τέχνη του αριθμείν ενυπάρχει στη φύση μας. Είναι επομένως κτήμα όλων

των ανθρώπων και έχει μια νοητική ουσία, την οποία αυτομάτως επενδύει με μορφή. Αυτό είναι που εξαπατά την πλειοψηφία, η οποία θεωρεί ότι η επτάδα δεν είναι τίποτε άλλο εκτός από επτά μονάδες. Διότι η φαντασία του αδαούς -ο οποίος πρέπει πρώτα να δει ένα πράγμα αδιακόσμητο, εν συνεχεία την επερχόμενη ενέργεια του διακοσμητή και τελικά, πάνω από όλα, το ίδιο το πράγμα, τέλειο και μορφοποιημένο- δεν μπορεί να πεισθεί ότι αυτό διαθέτει δύο φύσεις, μια άμορφη και μια μορφική, και επιπλέον εκείνο που πέρα από αυτά προσδίδει τη μορφή[1] αλλά ισχυρίζεται ότι το υποκείμενο είναι ένα και χωρίς γέννηση. Για αυτό, ίσως, οι αρχαίοι θεολόγοι και ο Πλάτωνας απέδωσαν παροδικές γεννήσεις σε πράγματα αγέννητα, ενώ στα αιωνίως κοσμούμενα και κανονικώς διευθετούμενα προσέδιδαν έλλειψη τάξης και διακόσμου· διέκριναν το εσφαλμένο και το απεριόριστο, προκειμένου να καταφέρουν να οδηγήσουν τους ανθρώπους στη γνώση μιας μορφοποιητικής και δρώσας αιτίας. Είναι, επομένως, αναμφίβολα θαυμαστό το ότι παρόλο που επτά αισθητές μονάδες δεν υφίστανται ποτέ χωρίς την επτάδα, η επιστήμη πρέπει να τις διαχωρίζει, καθώς και το ότι οι πρώτες κατέχουν θέση υποκειμένου και είναι ανάλογες με την ύλη, ενώ η επτάδα αντιστοιχεί στο είδος και τη μορφή.

Όπως όταν το νερό μετατρέπεται σε αέρα, το νερό δε γίνεται αέρας ή υποκείμενο του αέρα, αλλά εκείνο που ήταν υποκείμενο του νερού γίνεται υποκείμενο του αέρα, ομοίως όταν ένας αριθμός ενώνεται με έναν άλλο, όπως για παράδειγμα η τριάδα με τη δυάδα, τα είδη ή μορφές των αριθμών δεν αναμιγνύονται παρά μόνο στους άυλους λόγους τους, όπου παραμένοντας χωρισμένοι, ταυτόχρονα δεν εμποδίζονται να ενωθούν, ενώ οι ποσότητες των δύο αριθμών που τοποθετούνται μαζί, γίνονται το υποκείμενο της πεντάδας. Η τριάδα επομένως, είναι ένα, το ίδιο και η τετράδα, ακόμη και σε μαθηματικούς αριθμούς· διότι μολονότι στην εννεάδα ή τον αριθμό εννέα, μπορείς να αντιληφθείς μία πρώτη, δεύτερη και τρίτη τριάδα, εν τούτοις βλέπεις ένα πράγμα λαμβανόμενο τρεις φορές. Εν συντομία, στην εννεάδα δεν υπάρχει τίποτε άλλο εκτός από τη μορφή της εννεάδας στην πο-

σότητα εννέα μονάδων. Αλλά, εάν νοητικά διαχωρίσεις τα υποκείμενα της (διότι η μορφή είναι αδιαίρετη), αμέσως θα της προσδώσεις μορφές που αντιστοιχούν στη διαίρεση της· διότι η ψυχή μας δεν αντέχει να βλέπει εκείνο που είναι άμορφο και ακόσμητο, ιδιαίτερα καθώς έχει τη δύναμη να το κοσμεί.

Όπως δε οι χωριστοί αριθμοί κατέχουν μια δημιουργική ή παραγωγική δύναμη, την οποία ο μαθηματικοί αριθμοί μιμούνται, ομοίως ο αισθητός κόσμος περιέχει εικόνες εκείνων των αριθμών με τους οποίους κοσμείται· έτσι ώστε όλα τα πράγματα υπάρχουν σε όλα, άλλα στο καθένα με τον κατάλληλο τρόπο. Ο αισθητός κόσμος, επομένως, αποτελείται από άυλους και ενεργητικούς λόγους[3] και από αρχαιότερες αιτίες. Αλλά εκείνοι που από φόβο μήπως υποχρεωθούν να διπλασιάσουν τα ίδια τα πράγματα δεν παραδέχονται ότι η φύση η ίδια είναι πλήρης παραγωγικών δυνάμεων, είναι οι ίδιοι που απορούν πώς από πράγματα που στερούνται μεγέθους και βαρύτητας, συντίθεται μέγεθος και βαρύτητα· αν και ποτέ δε συντίθενται από πράγματα τέτοιου είδους που στερούνται βαρύτητας και μεγέθους, όπως τα τμηματικά. Το μέγεθος παράγεται από ουσιαστικά αδιαίρετο στοιχείο, εφόσον η μορφή και η ύλη είναι τα στοιχεία των σωμάτων και ακόμη περισσότερο, παράγεται από εκείνες τις αληθινές αιτίες που συναντώνται στους δημιουργικούς λόγους και μορφές. Δεν είναι λοιπόν απαραίτητο όλες οι διαστάσεις και όλες οι κινούμενες μάζες παράγονται από αυτές; Γιατί αλλιώς, είτε τα σώματα είναι αγέννητα όπως οι άυλες φύσεις, είτε τα διαθέτοντα διαστήματα πράγματα δε θα έχουν διαστήματα και θα είναι αιτίες, είτε τα διαιρετά θα είναι αδιαίρετα, είτε τα αισθητά θα είναι τα αντίθετά τους, δηλαδή πράγματα μη αισθητά και στερημένα επαφής. Πρέπει λοιπόν να συναινέσουμε με εκείνους που διαβεβαιώνουν ότι τα πράγματα που κατέχουν μέγεθος παράγονται από τα αδιαίρετα. Ο Πυθαγόρειος Εύρυτος και οι οπαδοί του, θεωρώντας τους αριθμούς εικόνες των ίδιων των πραγμάτων, ορθώς απέδωσαν ορισμένους αριθμούς σε ορισμένα πράγματα σύμφωνα με την ιδιαιτερότητα τους. Ως συνέπεια αυτού είπε

ότι ένας ιδιαίτερος αριθμός είναι το όριο του φυτού και ένας άλλος του ζώου· ακριβώς όπως ενός τριγώνου το όριο είναι το 6, ενός τετραγώνου το 9 και ενός κύβου το 8. Όπως ο μουσικός εναρμονίζει τη λύρα του μέσω μαθηματικών αριθμών, κατά τον ίδιο τρόπο η φύση μέσω των δικών της φυσικών αριθμών διευθετεί τα πλάσματά της με τάξη και τα συνταιριάζει.

Ότι οι αριθμοί πράγματι μετέχουν στους ουρανούς και ότι υπάρχουν ένας ηλιακός και ένας σεληνιακός αριθμός, είναι φανερό ακόμη και σ' έναν τυφλό, όπως λέει η παροιμία. Διότι η επάνοδος των ουράνιων σωμάτων στην αρχική τους θέση *(αποκαταστάσεις)* δεν θα επιτυγχανόταν από τα ίδια πράγματα και κατά τον ίδιο τρόπο, παρά μόνο αν ένας και ο ίδιος αριθμός είχε κυριαρχία σε καθένα από αυτά. Όλα συνεισφέρουν στην κίνηση των ουράνιων σφαιρών και εμπεριέχονται στον τέλειο αριθμό τους. Υπάρχει επίσης ένας ορισμένος φυσικός αριθμός που αρμόζει σε κάθε ζώο. Διότι αυτά που ανήκουν στο ίδιο είδος δε θα είχαν τα ίδια όργανα, ούτε θα έφταναν στην εφηβεία και τα γηρατειά με τον ίδιο περίπου τρόπο, ούτε θα γεννούσαν, ούτε το έμβρυο θα ανατρεφόταν ή θα μεγάλωνε σύμφωνα με κανονικές περιόδους, εκτός και αν κατανέμονταν από το ίδιο μέτρο της φύσης. Σύμφωνα επίσης με τους καλύτερους Πυθαγόρειους και τον ίδιο τον Πλάτωνα, ο αριθμός είναι η αιτία των καλύτερων και των χειρότερων γεννήσεων. Αν και οι Πυθαγόρειοι αναφέρονται στα τετράγωνα και τους κύβους των φυσικών αριθμών, δε θεωρούν ότι αυτά αποτελούνται μόνο από μονάδες, όπως ο αριθμός 9 και ο αριθμός 27, αλλά υποδηλώνουν μέ.σω αυτών των ονομάτων, λόγω ομοιότητας, την πρόοδο των φυσικών αριθμών στις γεννήσεις και την κυριαρχία τους σε αυτές. Κατά όμοιο τρόπο, μολονότι τους ονομάζουν ίσους ή διπλάσιους, παρουσιάζουν την κυριαρχία και τη συμφωνία των ιδεών με τους αριθμούς αυτούς. Συνεπώς, διαφορετικά πράγματα δε χρησιμοποιούν τον ίδιο αριθμό, εφόσον είναι διαφορετικά, ούτε επίσης τα όμοια πράγματα χρησιμοποιούν διαφορετικό αριθμό εφόσον είναι όμοια.

Εν συντομία, οι φυσικοί αριθμοί είναι μορφές της ύλης κατανεμημένες σύμφωνα με το υποκείμενο που τις λαμβάνει. Αλλά οι υλικές δυνάμεις είναι οι πηγές της ένωσης και της μετατροπής σε σώματα. Διότι η μορφή και η δύναμη που προέρχεται από αυτήν αποτελούν δυο διαφορετικά πράγματα. Η μορφή η ίδια είναι πραγματικά αδιαίρετη και ουσιώδης· αλλά καθώς αναπτύσσεται και διογκώνεται, εκτοξεύει από μέσα της, σαν μια έκρηξη, υλικές δυνάμεις, που είναι ορισμένες ποιότητες. Για παράδειγμα, στη φωτιά η μορφή και η ουσία της είναι αδιαίρετες και είναι αληθινά η εικόνα της αιτίας της φωτιάς· διότι στις διαιρετές φύσεις το αδιαίρετο έχει μια υπόσταση. Αλλά από τη μορφή που είναι αδιαίρετη στη φωτιά και που υφίσταται σε αυτήν ως αριθμός, μια επέκτασή της συνοδευόμενη από διάστημα πραγματοποιείται γύρω από την ύλη, από την οποία οι δυνάμεις της φωτιάς εκτοξεύονται, όπως ζέστη ή ψύξη ή υγρασία, ή κάτι άλλο αυτού του είδους. Και αυτές οι ποιότητες είναι πραγματικά ουσιώδεις, αλλά δεν είναι με κανένα τρόπο η ουσία της φωτιάς. Γιατί οι ουσίες δεν εκπορεύονται από τις ποιότητες, ούτε ταυτίζεται η ουσία με τη δύναμη. Ωστόσο το ουσιώδες προηγείται παντού της δύναμης. Από αυτό που είναι ένα προέρχεται το πλήθος των δυνάμεων, από εκείνο που είναι ακατανέμητο το κατανεμημένο, ακριβώς όπως πολλές ενέργειες πηγάζουν από μια δύναμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

Σχετικά με τη μονάδα.

Η μονάδα, καθώς μαθαίνουμε από τα αποσπάσματα του Νικόμαχου που διασώθηκαν από το Φώτιο, ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους νους, άρρεν και θήλυ, Θεός και κατά μία άποψη ύλη. Έλεγαν επίσης ότι αυτή, η οποία πράγματι συνέμιξε όλα τα πράγματα, είναι επιδεκτική και χωρητική όλων των πραγμάτων, είναι Χάος, σύγχυση, σύμμιξη, σκοτει-

νότητα, σκοτάδι, ένα χάσμα, ο Τάρταρος, η Στυξ και τρόμος, αμιγής, ένας υποχθόνιος βυθός, η Λήθη, μια άκαμπτη παρθένος, ο Άτλας. Την αποκαλούσαν επίσης άξονα, Ήλιο, Πυράλιο, Μορφώ, πύργο του Δία, σπερματικό λόγο και Απόλλωνα, προφήτη και αμφίλογο.

Όσον αφορά την πρώτη από τις ονομασίες, νους, είναι προφανής ο λόγος που οι Πυθαγόρειοι απεκάλεσαν τη μονάδα έτσι, μια και οι μορφές ή ιδέες αποκαλούνταν από αυτούς αριθμοί· όπως λοιπόν η μονάδα περιέχει μέσα της την αιτία των αριθμών, έτσι ο νους είναι η πηγή όλων των ιδεών. Όπως επίσης η μονάδα εμπεριέχει το πλήθος που αυτή παράγει και με το οποίο συμφωνεί, κατά τον ίδιο τρόπο ο νους εμπεριέχει όλες τις μορφές που προέρχονται από αυτόν και με τις οποίες είναι ισότιμος. Φαίνεται επίσης ότι αποκάλεσαν τη μονάδα άρρεν και θήλυ, επειδή περιέχει εντός της αιτιωδώς τον περιττό και τον άρτιο, από τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο αρσενικό και ο δεύτερος στο θηλυκό· ή σύμφωνα με τον ανώνυμο συγγραφέα του έργου *Θεολογούμενα της Αριθμητικής,* ονομαζόταν έτσι διότι είναι το σπέρμα όλων των πραγμάτων. Ο Θέων ο Σμυρναίος μας πληροφορεί ότι ο Αριστοτέλης, στην πραγματεία του περί των Πυθαγορείων, έλεγε ότι *«το ένα* συμμετέχει και στις δύο αυτές φύσεις· γιατί προστιθέμενο στον περιττό παράγει τον άρτιο αριθμό και προστιθέμενο στον άρτιο παράγει τον περιττό αριθμό, κάτι που δε θα μπορούσε να κάνει εάν δε συμμετείχε και στις δυο φύσεις». Προσθέτει επίσης ότι ο Αρχύτας συμφωνούσε με αυτό. Εφόσον ο Θεός είναι η αιτία ύπαρξης κάθε πλήθους, ο λόγος για τον οποίο ονόμαζαν τη μονάδα Θεό είναι προφανής. Επίσης σωστά την ονόμασαν *«κατά μία άποψη ύλη»* και όχι εντελώς ύλη λόγω της ομοιότητας της προς τη θεότητα. Διότι ο Θεός είναι το πρώτο και η ύλη το τελευταίο από τα πράγματα και καθένα υφίσταται μέσω της άρνησης όλων των πραγμάτων. Για αυτό λέγεται ότι η ύλη είναι ανομοίως όμοια προς τη θεότητα. Είναι όμοια, εφόσον υπάρχει μέσω της άρνησης όλων των πραγμάτων. Αλλά είναι ανομοίως όμοια, επειδή η θεότητα είναι καλύτερη

και πέρα από όλα τα πράγματα, ενώ η ύλη είναι χειρότερη και κάτω από όλα τα πράγματα.

Ομοίως ισχυρίζονταν ότι η μονάδα πράγματι συνέμιξε όλα τα πράγματα και ήταν επιδεκτική αυτών, εξαιτίας της αναλογίας της προς τη θεότητα˙ διότι όλα τα πράγματα συμμιγνύονται από την ανέκφραστη φύση της θεότητας και περιλαμβάνονται σε αυτή. Αλλά την ονόμασαν χάος λόγω της ομοιότητας της με το άπειρο, γιατί το χάος, σύμφωνα με τον Πυθαγόρα[4] είναι ανάλογο προς το άπειρο, με τον ίδιο τρόπο που ο αιθέρας αντιστοιχεί στο όριο. Το όριο και το άπειρο είναι οι δυο μεγάλες αρχές των όντων αμέσως μετά το άρρητο. Για τον ίδιο λόγο την ονόμασαν και χάσμα. Αλλά την αποκαλούσαν σύγχυση, σύμμιξη, σκοτεινότητα και σκοτάδι, επειδή στην ανέκφραστη αρχή, της οποίας είναι εικόνα, όλα τα πράγματα είναι κατά βάθος ένα χωρίς διαχωρισμό ή διάκριση, επειδή αυτή είναι πάντα προ των πάντων, και ως συνέπεια της ενέλιξής της σε ακατανότητα βάθη, καλύπτεται από άγνωστη σκοτεινότητα και σκοτάδι. Σύμφωνα με όσα παραθέτει ο Δαμάσκιος στη θαυμαστή χειρόγραφη πραγματεία του *Απορίαι και Λύσεις Περί των Πρώτων Αρχών,* οι Αιγύπτιοι δεν ισχυρίζονταν τίποτε για την πρώτη αρχή των πραγμάτων, αλλά την εξυμνούσαν σαν ένα τρισάγνωστο σκοτάδι που υπερβαίνει κάθε νοητική αντίληψη. (Ανυμνήκασιν πρώτην αρχήν σκότος υπέρ πάσαν νόησιν, σκότος άγνωστον, τρίς τούτο επιφημίζοντες.) Καθώς επίσης ο Τάρταρος υπάρχει στην άκρη του σύμπαντος σε μια καθοδική σειρά, η μονάδα είναι ανομοίως όμοια προς το άρρητο, το οποίο είναι το άκρο των πραγμάτων σε μια ανοδική σειρά. Την αποκάλεσαν δε Στύγα, λόγω της αμετάβλητης φύσης της. Διότι η Στυξ, κατά την πρώτη της υπόσταση, είναι η αιτία με την οποία οι θεϊκές φύσεις συγκρατούν μιαν αμετάβλητη ταυτότητα ουσίας˙ αυτό είναι το απόκρυφο νόημα του μυθικού ισχυρισμού ότι οι Θεοί ορκίζονται στη Στύγα, δηλαδή συνεχίζουν μέσω αυτής αμετάβλητα το ίδιο. Η ονομασία τρόμος φαίνεται ότι προήλθε από την αντίληψη ότι το άρρητο είναι τελείως άγνωστο και ασύνδετο με τη φύση μας, οπότε η αντίληψη οποιουδήποτε αισθητού πράγματος αυτού του είδους συνοδεύεται από τρό-

μο. Αμιγή, όμως, την ονόμασαν εξαιτίας της απλότητας της φύσης του άρρητου, ενώ υποχθόνιο βυθό λόγω του απροσμέτρητου βάθους της, που είναι πέρα από κάθε γνώση. Επειδή η γνώση, ως προς το άρρητο -καθώς ο Δαμάσκιος υπέροχα παρατηρεί- επανακάμπτει στην άγνοια, η μονάδα, η οποία είναι εικόνα αυτής, πολύ εύστοχα ονομάζεται Λήθη. Λόγω της αγνότητας της φύσης της η μονάδα αποκαλείται άκαμπτη παρθένος. Τέλος, το άρρητο υποστηρίζει, συνδέει και διαχωρίζει όλα τα πράγματα· μυθολογική απεικόνιση αυτού είναι οι στήλες του Άτλαντα, για αυτό η μονάδα ονομάστηκε Άτλας.

Εκτός από αυτές τις ονομασίες οι Πυθαγόρειοι αποκαλούσαν τη μονάδα Απόλλωνα, καθώς πληροφορούμαστε από τον Πλούταρχο και τον Πλωτίνο επειδή στερείται πλήθους. Την ονόμασαν επίσης Προμηθέα, σύμφωνα με τον ανώνυμο συγγραφέα του *Θεολογούμενα της Αριθμητικής,* επειδή αυτή με κανένα τρόπο δε μετακινείται προς το προηγούμενο μέρος (από του πρόσω μηδενί τρόπω θείν)· γιατί δεν υπάρχει τίποτε πέρα από το άρρητο. Ο ίδιος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι την έχουν ονομάσει «ουσία, αιτία της αλήθειας, απλό παράδειγμα, τάξη της συμφωνίας· ανάμεσα στο μεγαλύτερο και το μικρότερο το ίσο· ανάμεσα στη ένταση και την ύφεση το μέσο· στο πλήθος το μέτριο· στο χρόνο το παρόν, το τώρα. Και εκτός αυτών πλοίο, άρμα, *φίλο,* ζωή και ευτυχία». Διότι, όπως *το «ένα»* είναι όλα τα πράγματα πριν από όλα, αποτελεί πρωτίστως το πλέον εξαίρετο των πραγμάτων, αλλά κατ' αναλογία προς *το ένα,* χωρίς δηλαδή να αποχωρεί από την άρρητη απλότητα της φύσης της. Επίσης, την ονόμασαν μορφή, επειδή, όπως ο Σιμπλίκιος παρατηρεί *(Υπόμνημα εις την Αριστοτέλους Φυσικήν Ακρόασιν,* Βιβλίο 1), η μορφή περιγράφει και ορίζει κάθε πράγμα με το οποίο συνενώνεται. Την ονόμασαν και Πρωτέα, καθώς μας πληροφορεί ο προαναφερόμενος ανώνυμος συγγραφέας, επειδή εμπεριέχει τις ιδιομορφίες όλων. των πραγμάτων (ουκ άπιθάνως δέ και Πρωτέα προσηγόρευον αυτήν, τον έν Αίγύπτω πάμμορφον ήρωα, τα πάντων ιδιώματα περιέχουσαν). Επίσης, την ονόμασαν Δία, επειδή όπως είναι το ένα ή η άρρητη αρχή των

πραγμάτων προς όλους τους άλλους από τους Θεούς, έτσι είναι ο Δίας προς όλες τις μεταγενέστερες του θείες τάξεις, όπως θαυμάσια παρατηρεί ο Πρόκλος στο *Περί της κατά Πλάτωνα Θεολογίας,* Βιβλίο 5. Επίσης, την αποκάλεσαν Μνημοσύνη, με το όνομα της μητέρας των Μουσών, επειδή, καθώς οι Μούσες γεννούν όλη την ποικιλία των λόγων από τους οποίους ο κόσμος είναι υπερπλήρης και είναι οι αιτίες της τελειοποίησης του σύμπαντος, η Μνημοσύνη θα είναι ανάλογη προς το *ένα,* που είναι η πηγή κάθε πλήθους. Μπορεί επίσης να ειπωθεί ότι καθώς η Μνημοσύνη είναι μνήμη και η μνήμη είναι σταθερότητα γνώσης, η μονάδα ονομάστηκε έτσι, επειδή είναι η εικόνα του ενός που είναι η σταθερή ρίζα κάθε γνώσης και όλων των πραγμάτων. Την αποκάλεσαν Εστία, ή πυρ στο κέντρο της γης, επειδή, όπως ο Σιμπλίκιος παρατηρεί *(Υπόμνημα εις το Αριστοτέλους Περί Ουρανού,* Βιβλίο 2), κατέχει δημιουργική δύναμη, τροφοδοτεί ολόκληρη τη γη από το κέντρο και διεγείρει οτιδήποτε είναι μέσα της σε ψυχρή φύση, έτσι ώστε ως παραγωγικό κέντρο, είναι ανάλογο προς *το ένα*[5].

Σχετικά με αυτή την ονομασία, υπάρχει το ακόλουθο αξιόλογο απόσπασμα του προαναφερόμενου ανώνυμου συγγραφέα: «Επιπλέον αυτοί λένε ότι κάποιος πύρινος κύβος της φύσης της μονάδας βρίσκεται περίπου στο μέσο των τεσσάρων στοιχείων, του οποίου τη μέση θέση ο Όμηρος γνώριζε, όταν λέει:

Τόσο κάτω από το αόρατο βασίλειο ρίχθηκε,
όσο η γη απέχει από τον αιθέριο κόσμο.

Ο Εμπεδοκλής, ο Παρμενίδης και σχεδόν οι περισσότεροι από τους αρχαίους σοφούς φαίνεται ότι συμφωνούν σε αυτά με τους Πυθαγόρειους· διότι λένε ότι η φύση της μονάδας, κατά τον τρόπο της Εστίας, είναι εγκατεστημένη στο μέσο και για αυτό διατηρεί αυτή τη θέση σε ισορροπία». (Προς τούτοις φασί περί το μέσον των τεσσάρων στοιχείων κείσθαι τινά εναδικόν διάπυρον κύβον, ου την μεσότητα της θέας ειδέναι και Όμηρον λέγοντα

τόσον ένερθ' άϊδος, όσον ουρανός έστ' από γαίης.

εοίκασι δε κατά γε ταύτα κατηκολουθηκέναι τοις Πυθαγορείοις, οι τε περί Έμπεδοκλέα και Παρμενίδην, και σχεδόν οι πλείστοι των πάλαι σοφών, φάμενοι, τήν μοναδικήν φύσιν, Εστίας τρόπον, εν μέσω ιδρύσθαι και διά τούτο ισόρροπον φυλάσσειν την αυτήν έδραν».)

Τέλος, αποκάλεσαν τη μονάδα πολυώνυμο -καθώς πληροφορούμαστε από τον Ησύχιο- και τούτο με τη μεγαλύτερη ορθότητα, επειδή το *άρρητο ένα,* του οποίου η μονάδα είναι εικόνα, είναι τα πάντα προ των πάντων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Σχετικά με τη δυάδα.

Οι Πυθαγόρειοι αποκαλούσαν τη δυάδα, όπως μαθαίνουμε από το Νικόμαχο, «τόλμη, ύλη, αιτία της ανομοιότητας, το διάστημα ανάμεσα στο πλήθος και τη μονάδα. Αυτή μόνο παράγει ισότητα από τη σύνθεση και την ανάμιξη και εξαιτίας αυτού είναι επίσης ίση. Αλλά ομοίως είναι άνιση, ελλιπής και αφθονία, και μόνον αυτή είναι άμορφη, αόριστη, και άπειρη. Επίσης, τούτη μόνη είναι η αρχή και η αιτία του άρτιου, αλλά όμως δεν είναι αρτιάκις άρτια, ούτε περισσάρτια, ούτε αρτιοπέρισση. Αλλά πολλά από αυτά τα πράγματα βρίσκονται κοντά στη φυσική ιδιομορφία της δυάδας. Είναι ομοίως η πηγή κάθε συμφωνίας και μεταξύ των Μουσών είναι η Ερατώ. Είναι επίσης αρμονία, υπομονή και ρίζα, όχι όμως κατά κάποια άποψη εν ενεργεία. Είναι επίσης δύναμη, οι πρόποδες της Ίδης με άφθονες πηγές, μια κορυφή και ο Φάνης. Είναι επίσης Δικαιοσύνη και Ίσις, Φύση και Ρέα, η μητέρα του Δία και πηγή της διανομής. Επιπλέον την αποκαλούσαν Φρυγία, Λυδία, Δινδυμήνη, Δήμητρα και Ελευσίνια, Άρτεμη και Έρωτα, Δίκτυννα, Αερία, Αστερία, Δίσαμο και Εστώ. Επίσης Αφροδίτη, Διώνη, Μυχία, Κυθέρεια, άγνοια,

αγένεια, ψεύδος, διαφορά, αδιακρισία, διαμάχη, έριδα, Μοίρα και Θάνατο».

Πριν, εν τούτοις, αναπτύξουμε αυτές τις ονομασίες, είναι απαραίτητο να παρατηρήσουμε σχετικά με τη δυάδα ότι οι Πυθαγόρειοι, προτού αποδείξουν ότι το πλήθος υφίσταται στα νοητά, αναγκαστικά εξέτασαν την αιτία του πλήθους που υπάρχει εκεί. Βρήκαν λοιπόν ότι μεταξύ των γενών των όντων είναι η *διαφορά,* η οποία υφίσταται σύμφωνα με το *μη ον* αλλά ότι ανάμεσα στις αιτίες κατ' εξοχήν πρώτη είναι η αόριστη δυάδα. Ο Πυθαγόρας στον Ιερό Λόγο, λέει ο Συριανός, την αποκαλεί χάος και τη συνδέει με το νου, ονομασία που ο ίδιος αποδίδει στη μονάδα, την πρώτη από τις δυο μεγάλες αρχές[6] μετά από το *άρρητο ένα..*

Η δυάδα είναι πράγματι παντού η αιτία του πλήθους, εφόσον παράγει πράγματα από *το ένα* με τις κατάλληλες διαφορές τους. Αλλά εφόσον είναι μια αρχή, υπάρχει επίσης στις διάφορες τάξεις των όντων μια κατάλληλη μονάδα· και βρίσκεται δυάδα σύμφυτη προς αυτή, η οποία γεννά έναν αριθμό κατάλληλο για αυτή.

Κάθε αριθμός υφίσταται από τούτες τις δύο αρχές, τη μονάδα και τη δυάδα· αλλά ο περιττός αριθμός χαρακτηρίζεται περισσότερο από την ιδιότητα της μονάδας, ενώ ο άρτιος από την ιδιότητα της δυάδας. Στις γωνίες επίσης, η ορθή γωνία υφίσταται περισσότερο σύμφωνα προς τη μονάδα, ενώ η οξεία και η αμβλεία σύμφωνα προς την αόριστη δυάδα, στην οποία η υπεραφθονία και η έλλειψη είναι καταφανείς. Από τα σχήματα, ομοίως, εκείνα που χαρακτηρίζονται από ισότητα, ταυτότητα και ομοιότητα έχουν μεγαλύτερη σχέση με τη μονάδα· αλλά εκείνα στα οποία επικρατούν η ανισότητα, η διαφορά και η ανομοιότητα συνδέονται περισσότερο με τη δυάδα. Εν συντομία, κάθε σχήμα υφίσταται από αυτές τις δύο αρχές, διότι η σφαίρα, ο κύκλος, το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και ο κύβος, μετέχουν της δυάδας εξαιτίας της ποσότητας τους και της κατοχής διαστημάτων. Και πάλι, ο ξύλινος κορμός, οι βωμοί, τα σκαληνά τρίγωνα και τα ορθογώνια συμφωνούν με τη μονάδα, από την οποία λαμβάνουν το σχήμα τους.

Οι Πυθαγόρειοι, λέει ο Συριανός, εξέταζαν τα γεγονότα και είδαν ότι οι ίδιες αρχές είχαν ανάλογη υπόσταση σε αυτά· και ότι αυτά είχαν την κατάλληλη μονάδα και δυάδα, την πρώτη ως αιτία της ταυτότητας τους, τη δεύτερη ως αιτία της διαφοράς και του πλήθους. Στους φυσικούς επίσης λόγους, ή παραγωγικές σπερματικές αρχές, τοποθέτησαν αποτελεσματικές αιτίες. Υπάρχει, επομένως, στη φύση μία παραγωγική αρχή που γεννά όλα τα χρώματα και άλλη μία που πραγματικά τελειοποιείται από αυτήν, παράγουν όμως μαζί το πλήθος και την ποικιλία των χρωμάτων αυτές είναι η μονάδα και η δυάδα των χρωμάτων. Σε άλλα επίσης γεγονότα, τα οποία τελειοποιούνται μέσω των φυσικών λόγων, θα βρεθούν μια μονάδα και μια δυάδα ανάλογες προς αυτά.

Μετά από αυτές τις εξηγήσεις, ας στρέψουμε την προσοχή μας στις ονομασίες της δυάδας. Σχετικά με την ονομασία τόλμη πληροφορούμαστε από τον ανώνυμο συγγραφέα ότι η δυάδα ονομάστηκε έτσι «επειδή αυτή πρώτη αποχωρίστηκε τη μονάδα». Διότι όπως η κάθοδος της ψυχής στο σώμα και η εγκατάλειψη από μέρους της μιας νοητικής και θείας ζωής για μια παράλογη και θνητή κατάσταση ύπαρξης, μπορεί να ονομαστεί τόλμη, καθώς είναι κατά κάποια άποψη απρεπής τόλμη, έτσι και όσον αφορά την υπερβατική εξοχότητα της μονάδας· μια αποχώρηση από αυτήν, όπως από τον πατρικό βυθό και το άδυτον της θεόθρεπτης σιγής -όπως αποκαλείται στους Χαλδαϊκούς χρησμούς- μπορεί να ονομασθεί μεταφορικά αυθάδες εγχείρημα. Αλλά η δυάδα ονομάστηκε ύλη, επειδή είναι απροσδιόριστη και αιτία όγκου και διαίρεσης, καθώς ο Σιμπλίκιος παρατηρεί στο *Υπόμνημα εις την Αριστοτέλους Φυσικήν Ακρόασιν.* Και είναι η αιτία της ανομοιότητας, καθώς ως προς την πρώτη υπόστασή της είναι το *άπειρον,* από το οποίο εξαρτάται η ανομοιότητα κατά τον ίδιο τρόπο που η ομοιότητα εξαρτάται από το όριο. Και είναι το διάστημα ανάμεσα στο πλήθος και τη μονάδα, επειδή δεν είναι ακόμη τέλειο πλήθος, αλλά είναι σαν να το γεννά και σχεδόν να το αποκαλύπτει στο φως. Μια εικόνα αυτού βλέπουμε στη δυάδα της αριθμητικής. Διότι, καθώς ο Πρόκλος παρατηρεί θαυμάσια στα Σχόλια του στον 20ο και σε άλλους

ορισμούς του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη: «Η δυάδα είναι το μέσο ανάμεσα στη μονάδα και τον αριθμό. Διότι η μονάδα παράγει περισσότερα με την πρόσθεση παρά με τον πολλαπλασιασμό· ενώ αντίθετα ο αριθμός αυξάνεται περισσότερο με τον πολλαπλασιασμό παρά με την πρόσθεση· και η δυάδα, είτε πολλαπλασιαζόμενη με τον εαυτό της, είτε προστιθέμενη με αυτόν, παράγει ίση ποσότητα». Αποκαλούσαν επίσης τη δυάδα ίση, επειδή, λέει ο ανώνυμος συγγραφέας, «δύο συν δύο *ισούται* με δύο επί δύο»: δηλαδή η πρόσθεση του δύο στον εαυτό του ισούται με τον πολλαπλασιασμό του με τον εαυτό του. Αλλά είναι άνιση, ελλιπής και αφθονία όπως παρατηρεί ο ίδιος συγγραφέας, σύμφωνα προς τη σύλληψη της ύλης. Προσθέτει δε ότι οι Πυθαγόρειοι ονομάζουν την αόριστη δυάδα ύλη, επειδή, όπως της ταιριάζει, στερείται μορφής, σχήματος και συγκεκριμένου ορισμού και περιορίζεται από το λόγο και την τέχνη. Ομοίως, είναι μόνη άμορφη, επειδή, όπως παρατηρεί ο ανώνυμος συγγραφέας: «Από το τρίγωνο και την τριάδα πολυγωνικά σχήματα προβάλλουν εν ενεργεία *επ' άπειρον* από τη μονάδα όλα τα σχήματα υπάρχουν αμέσως εν δυνάμει· αλλά από δύο πράγματα, είτε είναι ορθές γωνίες ή ευθείες γραμμές, ποτέ δεν μπορεί να συντεθεί ένα ευθύγραμμο σχήμα»[7].

Αλλά η δυάδα ονομάστηκε απεριόριστη και αόριστη, επειδή στην πρώτη υπόστασή της είναι άπειρο, επομένως δεν έχει αρμόζον πέρας. Και καθώς αποδείξαμε ότι ονομαζόταν ίση, δεν είναι άξιον απορίας ότι ονομάστηκε «η αιτία του άρτιου» και επομένως ως αιτία τούτου λεγόταν ότι δεν είναι ούτε αρτιάκις άρτια, ούτε περισσάρτια, ούτε αρτιοπέρισση.

Επιπροσθέτως, την αποκαλούσαν πηγή κάθε συμφωνίας, επειδή η δια πασών συμφωνία, που είναι η αρμονικότερη, σχηματίζεται από λόγο δύο προς ένα. Ονομάστηκε δε Ερατώ, «επειδή», λέει ο ανώνυμος συγγραφέας, «προσελκύει μέσω του έρωτα την προχώρηση της μονάδας ως μορφής, παράγοντας έτσι τα υπόλοιπα αποτελέσματα» (την γάρ της μονάδος, ώς είδους πρόσοδον δι' έρωτα επισπωμένη, τα λοιπά αποτελέσματα γεννά). Ως πηγή κάθε συμφωνίας είναι φανερό γιατί ο-

νομάστηκε αρμονία. Αλλά ονομάστηκε υπομονή, επειδή, λέει ο ανώνυμος συγγραφέας, είναι το πρώτο πλήθος που αντέχει ή υποφέρει τον αποχωρισμό, δηλαδή διαχωρισμό από το άδυτο της μονάδας. Είναι επίσης ρίζα, αν και όχι κατά κάποια άποψη εν ενεργεία, επειδή είναι η μητέρα του αριθμού που γεννά, αλλά δεν είναι και αριθμός σε τέλεια ενέργεια. Ομοίως ονομάστηκε δύναμη, επειδή το πρώτο άπειρο είναι η πρώτη δύναμη. Και είναι οι πρόποδες της Ίδης που έχουν άφθονες πηγές, επειδή αυτή είναι η ρίζα του βασιλείου των ιδεών, ή μια νοητική ουσία. Διότι οι πρόποδες ενός όρους είναι το ίδιο με τα ριζά αυτού· και το όρος Ίδη, όπως ο Πρόκλος παρατηρεί στην *Απολογία για τον Όμηρο,* σημαίνει το βασίλειο των ιδεών. Επίσης ονομάστηκε Φάνης, ή νοητό, επειδή είναι η απόκρυφη δύναμη αυτού. Γενικά, μπορεί να ειπωθεί ότι είναι Δικαιοσύνη, Ίσις, Φύση, Ρέα, κ.λπ., επειδή, καθώς είναι θηλυκής φύσης, είναι η πηγή όλων των θεοτήτων που έχουν θηλυκά χαρακτηριστικά. Ομοίως, φαίνεται ότι ονομάστηκε Έρως για τον ίδιο λόγο για τον οποίο ονομάστηκε Ερατώ, επειδή δηλαδή επιθυμεί την προσχώρηση της μονάδας. Αλλά είναι άγνοια λόγω της υπόστασης της ως απείρου, για το οποίο υπάρχει πλήρης άγνοια. Τέλος είναι αγένεια, ψεύδος, διαφορά, κ.λπ., καθώς είναι ο ηγέτης της χειρότερης συνεργασίας των πραγμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

Σχετικά με την τριάδα.

Ο Νικόμαχος, στα διασωθέντα από το Φώτιο αποσπάσματα του, παρατηρεί σχετικά με τη τριάδα συμφωνώντας με τους Πυθαγόρειους τα ακόλουθα: «Η τριάδα είναι ο πρώτος περιττός αριθμός εν ενεργεία, είναι ο πρώτος τέλειος αριθμός, είναι μέσο και αναλογία. Προκαλεί τη δύναμη της μονάδας να προχωρήσει σε ενέργεια και επέκταση. Αλλά είναι επίσης ο πρώτος των αριθμών και κυρίως σύστημα μονάδων.

Ως εκ τούτου, οι Πυθαγόρειοι συσχετίζουν αυτόν τον αριθμό με τη φυσιολογία. Διότι η τριάδα είναι η αιτία εκείνου που έχει τριπλές διαστάσεις, δίνει όριο στο άπειρο των αριθμών, είναι όμοια και η ίδια, ομόλογη και ορισμένη. Η τριάδα επίσης είναι νους και είναι η αιτία καλής συμβουλής, νόηση και γνώση. Είναι επίσης η κυριότερη των αριθμών, η διδάσκουσα και η σύνθεση κάθε μουσικής. Ομοίως είναι ιδιαιτέρως η διδάσκουσα τη γεωμετρία, είναι αυθεντία σε οτιδήποτε αφορά την αστρονομία, τη φύση και τη γνώση των ουράνιων σωμάτων, τα συνδέει και τα οδηγεί σε δράση. Επίσης, κάθε αρετή εξαρτάται από αυτόν τον αριθμό και προβάλλει από αυτόν. Στη συνέχεια, σχετικά με τις μυθολογικές ονομασίες της, είναι ο Κρόνος και η Λητώ και το κέρας της Αμάλθειας. Είναι και ο Οφίων, η Θέτις και η Αρμονία, η Εκάτη, η Έρανα, και Χαρίτια και ανάμεσα στις Μούσες η Πολυμνία. Είναι επίσης Πλούτων και Λοξία, η άρκτος και η Ελίκη και ο αστερισμός που ποτέ δε δύει στο βυθό. Είναι Δαματράμη και Διοσκορία, Μήτις και Τρίδυμος, Τρίτων και το τέλειο της θάλασσας, Τριτογένεια και Αχελώος, Ναίτις και Αγυιόπεζα, Κουρήτις και Κραταιής, Συμένια και γάμος, Γοργονία και Φορκία, Τρίσαμος και Λύδιος».

Αυτά αναφέρει ο Νικόμαχος. Ότι η τριάδα λοιπόν είναι ο πρώτος εν ενεργεία περιττός αριθμός, θα γίνει φανερό από την παρατήρηση ότι είναι πράγματι ο πρώτος αριθμός· γιατί ο αριθμός αυξάνεται περισσότερο με τον πολλαπλασιασμό παρά με την πρόσθεση, όπως προηγουμένως παρατηρήσαμε από τον Πρόκλο, και αυτό συμβαίνει με την τριάδα, αλλά δε συμβαίνει με τη δυάδα και τη μονάδα. Ότι είναι ο πρώτος τέλειος αριθμός, γίνεται φανερό από το ότι, όπως ο Αριστοτέλης[8] παρατηρεί, τρία πράγματα συγκροτούν ένα όλον και το όλον είναι τέλειο, καθώς έχει αρχή, μέσο και τέλος. Αλλά η τριάδα είναι μέσο και αναλογία, επειδή κάθε αναλογία αποτελείται από τρεις όρους τουλάχιστον και οι αναλογίες καλούνταν από τους αρχαίους μέσα. Προκαλεί επίσης τη δύναμη της μονάδας να προχωρήσει σε ενέργεια και επέκταση, επειδή η μονάδα θεωρούμενη ως μη προχωρούσα είναι η ύπαρξη ή η κορυφή της ουσίας, και είναι γό-

νιμη εν δυνάμει· και κατά τρίτον αποκαλύπτει μέσω της ενέργειας το πλήθος στο φως. Ότι η τριάδα είναι η πρώτη των αριθμών το έχουμε ήδη αποδείξει. Λεγόταν δε και σύστημα μονάδων, επειδή κάθε σύστημα έχει πρώτο, μέσο και τελευταίο. Παρέχει δε πέρας στο άπειρο του αριθμού, επειδή είναι καθόλα τέλεια. Έτσι, από την καθόλα τέλεια φύση της είναι όμοια και ίδια, ομόλογη και ορισμένη. Ως ενέργεια επίσης, είναι νους· διότι ο νους είναι η πρώτη ενέργεια. Είναι η αιτία καλής συμβουλής, νόηση και γνώση, «επειδή», όπως παρατηρεί ο ανώνυμος συγγραφέας, «οι άνθρωποι ορθώς χρησιμοποιούν τις παρούσες καταστάσεις, προβλέπουν αυτές που είναι μελλοντικές και αποκτούν πείρα από τις παρελθούσες». Είναι επίσης η κυριότερη, επειδή είναι η πρώτη των αριθμών. Και είναι η διδάσκουσα και η σύνθεση κάθε μουσικής, επειδή η αρμονία περιέχει τρεις συμφωνίες, τη δια πασών, τη δια πέντε και τη δια τεσσάρων. Μπορεί ομοίως να ειπωθεί ότι είναι ιδιαιτέρως η διδάσκουσα τη γεωμετρία, επειδή το τρίγωνο είναι η αρχή όλων των σχημάτων. Σχετικά δε με την αυθεντία της τριάδας σε οτιδήποτε αφορά την αστρονομία, τη φύση και γνώση των ουράνιων σωμάτων και ότι αυτή τα συνδέει και τα οδηγεί σε δράση, αυτό θα γίνει φανερό με την παρατήρηση ότι υπάρχουν τρεις τετράδες ουράνιων ζωδίων, δηλαδή η απλανής, η πλανώμενη και η κοινή. Επίσης, σε κάθε σημείο του ζωδιακού κύκλου υπάρχουν τρεις όψεις και τρεις δεκανοί και οι τρεις κυβερνήτες κάθε τριπλότητας. Και ανάμεσα στους πλανήτες υπάρχουν τρεις μοίρες. Σύμφωνα με τους Χαλδαίους επίσης, υπάρχουν τρεις αιθερικοί κόσμοι προηγούμενοι της σφαίρας των απλανών. Και πληροφορούμαστε από τον ανώνυμο συγγραφέα ότι «κάθε μεταβίβαση θείων και θνητών φύσεων επιτελείται με την *εκπομπή,* την *υποδοχή* και την *ανταπόδοση*- οι αιθέριες φύσεις κατά κάποιον τρόπο παράγουν η περιοχή που περιβάλλει τη γη είναι κατά κάποιο τρόπο ο υποδοχέας και η ανταπόδοση συμβαίνει μέσω πραγμάτων που έχουν ενδιάμεση υπόσταση». (Ότι και ή σύμπασα διεξαγωγή θείων τε και θνητών εκ τε προέσεως, και υποδοχής, και τρίτον ανταποδόσεως κρατύνεται, σπερμαινόντων μέν τρόπον τινά των αιθέριων, υποδεχομέ-

νων δε ωσανεί των περιγείων, ανταποδόσεις δε διά των ανά μέσων τελουμένων»).

Όσον αφορά τις μυθολογικές ονομασίες αυτού του αριθμού, εφόσον κανένα διασωζόμενο συγγραφικό έργο δεν έχει αποκαλύψει τη μυστική σημασία τους, θα παρατηρήσω μονάχα ότι οι διάφορες θεότητες που με τα ονόματα τους δοξάζεται η τριάδα, αναμφίβολα σχετίστηκαν με αυτήν εφόσον καθεμία από αυτές είναι τέλειας φύσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

Σχετικά με την τετράδα.

Η τετράδα, όπως μαθαίνουμε από το Νικόμαχο, ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους «το μέγιστο θαύμα, Θεός κατ' άλλον τρόπο (από την τριάδα), πολύμορφη, ή μάλλον κάθε θεότητα. Είναι επίσης η πηγή των φυσικών αποτελεσμάτων και ο κλειδούχος της φύσης. Είναι η εισάγουσα και η αιτία της σύστασης και μονιμότητας των μαθηματικών επιστημών. Είναι ομοίως η φύση του Αίολου, είναι Ηρακλής και ανύψωση, η πιο ρωμαλέα, αρσενική και αρρενωπή. Είναι ο Ερμής και ο Ήφαιστος, Βάκχος και Σωρίτις, Μαιαδεύς ή Μαιάδης. Διότι η τετράδα είναι ο γιος της Μαίας, δηλαδή της δυάδας. Είναι επίσης Εριούνιος, Σώκος, και Διόσκουρος, Βασσαρέων και Διμήτωρ, έχοντας για μητέρα της τη δυάδα. Είναι επίσης θηλυκής μορφής, είναι αιτιατή της αρρενωπότητας και διεγείρει βακχική μανία. Ομοίως είναι Αρμονίτα ή Αρμονία, και ανάμεσα στις Μούσες, η Ουρανία».

Όσον αφορά την πρώτη από αυτές τις ονομασίες, «το μέγιστο θαύμα», είναι αναγκαίο να παρατηρήσουμε ότι η τετράδα στην πρώτη της υπόσταση είναι το άκρο της νοητής τριάδας, που ονομαζόταν από τον Ορφέα Φάνης και Πρωτογενής και από τον Πλάτωνα *αυτόζωον (αφ'* εαυτού υπάρχον). Σε αυτήν περιέχονται οι πρώτες ιδέες όλων των πραγμάτων. Και, όπως πληροφορούμαστε από τον Πρόκλο, είναι η πρώ-

τη ρητή θεότητα, όλα πέραν αυτής είναι τελείως άρρητα. Έτσι, όλες οι νοητές τάξεις των Θεών, λέγεται από τον Ορφέα, έχουν μείνει *έκθαμβες* βλέποντας αυτή τη θεότητα να αποκαλύπτει τον εαυτό της στο φως μέσα από μυστική και άφατη σιωπή.

Θαύμαζον καθορώντες εν αιθέρι φέγγος άελπτον,
τω μεν απέστιλβε χρόος αθανάτοιο φάνητος.

*(**Πρόκλου, Βιβλ.** 2, Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιον)*

Έτσι σαν μια εκθαμβωτική, θαυμαστή και απροσδόκητη θεότητα, η τετράδα μπορεί να ειπωθεί μυθολογικά ότι είναι το μέγιστο θαύμα. Είναι δε Θεός κατ' άλλον τρόπο από την τριάδα, επειδή στην τριάδα γίνεται ορατό το πρώτο τέλειο, αλλά στην τετράδα όλες οι εγκόσμιες φύσεις συμπεριλαμβάνονται σύμφωνα με την αιτιότητα της αρχής. Ομοίως, επειδή η φύση της περιλαμβάνει τα πάντα, είναι πολύμορφη, ή μάλλον, κάθε θεότητα. Όπως επίσης, επειδή αυτή *αιτιατός* περιέχει όλες τις εγκόσμιες φύσεις, μπορεί πολύ ορθώς να ονομαστεί η *πηγή* των φυσικών αποτελεσμάτων. Επιπλέον, επειδή αυτή ανοίγει και κλείνει τις εσοχές της γέννησης, ονομάζεται, όπως παρατηρεί ο ανώνυμος συγγραφέας, ο *κλειδούχος της φύσης,* καθώς επίσης είναι η μητέρα των Θεών, που αναπαρίσταται με ένα κλειδί. Αλλά είναι η εισάγουσα και η αιτία της σύστασης και μονιμότητας των μαθηματικών επιστημών, επειδή αυτές είναι τέσσερις στον αριθμό, αριθμητική, γεωμετρία, μουσική και αστρονομία και επειδή οι πρώτοι αριθμοί και οι πρώτες μορφές υφίστανται στη νοητή τετράδα. Ομοίως λέγεται ότι είναι η φύση του Αίολου εξαιτίας της ποικιλίας των ιδιομορφιών της, σύμφωνα με τον ανώνυμο συγγραφέα, και επειδή χωρίς αυτήν θα ήταν αδύνατον να υφίσταται η εύτακτος και συμπαντική κατανομή των πραγμάτων. Σχετικά με τις άλλες ονομασίες της τετράδας, αφενός επειδή ο Μεούρσιους στο έργο του *Πυθαγορικός. Δεκαδικός* δεν έδωσε παρά λίγα αποσπάσματα από τον ανώνυμο συγγραφέα, μολονότι η πραγματεία του ομολογουμένως περιέχει εξήγηση αυτών των ονομάτων, αφετέρου επειδή δεν μπορώ να βρω ικανοποιητική ανάπτυξη αυτών σε κα-

νένα αρχαίο συγγραφέα, εξαιρουμένης της ονομασίας Αρμονία, δε θα επιχειρήσω κάποια διασαφήνισή τους. Η τετράδα πολύ ορθώς ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους αρμονία, επειδή ο λόγος τέσσερα προς ένα σχηματίζει τη συμφωνία δις δια πασών.

Αποκάλεσαν επίσης την τετράδα πρώτο ύψος, επειδή θεωρούσαν το σημείο ανάλογο προς τη μονάδα, τη γραμμή προς τη δυάδα, την επιφάνεια προς την τριάδα, και το στερεό προς την τετράδα. Ομοίως την ονόμασαν δικαιοσύνη, επειδή, όπως πληροφορούμαστε από τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα *(Υπόμνημα εις Αριστοτέλους τα Μετά τα Φυσικά,* Κεφ. 5), θεωρούσαν ότι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της δικαιοσύνης είναι η επανόρθωση και η ισότητα˙ ανακαλύπτοντας επομένως ότι αυτό υπάρχει στους αριθμούς, είπαν ότι ο πρώτος αρτιάκις άρτιος αριθμός είναι δικαιοσύνη. Διότι βεβαίωναν ότι εκείνο που είναι πρώτο σε πράγματα που έχουν την ίδια σχέση, είναι κύρια εκείνο που λέγεται πως υπάρχει. Και η τετράδα είναι αυτός ο αριθμός, επειδή, εφόσον αυτή είναι το πρώτο τετράγωνο, διαιρείται σε άρτιους αριθμούς και είναι άρτια. Επίσης, η τετράδα ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους «πας αριθμός», επειδή συμπεριλαμβάνει μέσα της όλους τους αριθμούς μέχρι τη δεκάδα και τη δεκάδα την ίδια˙ διότι το άθροισμα των 1, 2, 3 και 4, είναι 10. Για αυτό, τόσο η δεκάδα όσο και η τετράδα ονομάζονταν από αυτούς «πας αριθμός», η δεκάδα εν ενεργεία και η τετράδα εν δυνάμει. Ομοίως, το άθροισμα αυτών των τεσσάρων αριθμών συνέθετε την τετρακτύν, στην οποία περιλαμβάνονται όλες οι αρμονικές αναλογίες. Διότι το 4 προς 1, που είναι τετραπλός λόγος, σχηματίζει, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, τη συμφωνία δις δια πασών ο λόγος του 3 προς το 2, που είναι ημιόλιος, σχηματίζει τη συμφωνία δια πέντε˙ ο λόγος 4 προς 3, που είναι επίτριτος, τη συμφωνία δια τεσσάρων και αυτός του 2 προς 1, που είναι διπλάσιος λόγος, σχηματίζει τη συμφωνία δια πασών.

Επειδή οι Πυθαγόρειοι τιμούσαν ιδιαίτερα την τετρακτύν, είναι σωστό να αναφερθούμε σε αυτή πιο διεξοδικά και για το λόγο αυτό να δείξουμε, βασιζόμενοι στο Θέωνα

το Σμυρναίο[9] πόσες τετρακτύες υπάρχουν: «Η τετρακτύς», λέει αυτός, «δεν ήταν μόνον πρωτίστως τιμώμενη από τους Πυθαγόρειους, επειδή όλες οι συμφωνίες εμπεριέχονται σε αυτήν, αλλά επειδή επίσης φαίνεται να περιέχει τη φύση όλων των πραγμάτων». Για αυτό και η ακόλουθη φράση ήταν ο όρκος τους: «Όχι, μα αυτόν που παρέδωσε στην ψυχή μας την τετρακτύν, η οποία περιέχει την πηγή και ρίζα της αιώνιας φύσης[10]». Και με «αυτόν που παρέδωσε την τετρακτύν» εννοούν τον Πυθαγόρα· διότι το δόγμα που σχετίζεται με αυτήν, φαίνεται ότι υπήρξε δική του επινόηση. Η προαναφερθείσα τετρακτύς, επομένως, φαίνεται στη σύνθεση των πρώτων αριθμών 1, 2, 3, 4. Αλλά η δεύτερη τετρακτύς προκύπτει από την αύξηση μέσω πολλαπλασιασμού των άρτιων και περιττών αριθμών ξεκινώντας από τη μονάδα. Από αυτούς η μονάδα θεωρείται πρώτος, επειδή, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, είναι η αρχή όλων των άρτιων, περιττών και αρτιάκις άρτιων αριθμών και η φύση αυτής είναι απλή. Αλλά οι τρεις επόμενοι αριθμοί λαμβάνουν τη σύνθεσή τους σύμφωνα με τον άρτιο και τον περιττό· επειδή κάθε αριθμός δεν είναι μόνο άρτιος, ούτε μόνο περιττός. Άρα, οι άρτιοι και οι περιττοί μετέχουν σε δυο τετρακτύες, σύμφωνα με τον πολλαπλασιασμό· πραγματικά, οι άρτιοι με ένα λόγο δυο προς ένα, εφόσον το 2 είναι ο πρώτος από τους άρτιους αριθμούς και αυξάνεται από τη μονάδα με διπλασιασμό. Αλλά ο περιττός αριθμός αυξάνεται με ένα λόγο τρία προς ένα, εφόσον το 3 είναι ο πρώτος από τους περιττούς αριθμούς και αυξάνεται από τη μονάδα με τριπλασιασμό. Επομένως, η μονάδα είναι κοινή και στους δυο αυτούς, καθώς είναι η ίδια άρτια και περιττή. Ο δεύτερος όμως αριθμός στους άρτιους και διπλάσιους αριθμούς είναι το 2· και στους περιττούς και τριπλάσιους το 3. Ο τρίτος στους άρτιους αριθμούς είναι το 4 και στους περιττούς είναι το 9· ο τέταρτος στους άρτιους αριθμούς είναι το 8 και στους περιττούς είναι το 27.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1, & 2, & 4, & 8 \\ 1, & 3, & 9, & 27 \end{array} \right\}$$

Στους αριθμούς αυτούς βρίσκονται οι τελειότεροι λόγοι συμφωνιών σε αυτούς επίσης, συμπεριλαμβάνεται ο τόνος. Η μονάδα όμως περιέχει την παραγωγική αρχή του σημείου. Οι δεύτεροι αριθμοί 2 και 3 περιέχουν την αρχή της πλευράς, εφόσον είναι ασύνθετοι και πρώτοι, έχουν διαιρέτη τη μονάδα και εκ φύσεως μετρούν μια ευθεία γραμμή. Οι τρίτοι όροι 4 και 9 είναι εν δυνάμει μια τετράγωνη επιφάνεια, εφόσον είναι ισάκις ίσοι[11].

Και οι τέταρτοι όροι 8 και 27 είναι εν δυνάμει κύβοι, καθώς είναι ισάκις ισάκις ίσοι[12]. Έτσι, από αυτούς τους αριθμούς και αυτήν την τετρακτύν, η αύξηση λαμβάνει χώρα από ένα σημείο προς ένα στερεό. Διότι η πλευρά έπεται του σημείου, η επιφάνεια της πλευράς και το στερεό της επιφάνειας. Από τους αριθμούς αυτούς συνιστά την ψυχή ο Πλάτωνας στον *Τίμαιο.* Ο τελευταίος από αυτούς τους επτά αριθμούς, δηλαδή το 27, ισούται με όλους τους αριθμούς που προηγήθηκαν αυτού· διότι $1+2+3+4+8+9=27$. Υπάρχουν επομένως δυο τετρακτύες αριθμών, η μία μέσω πρόσθεσης και η άλλη μέσω πολλαπλασιασμού, οι οποίες περικλείουν μουσικούς, γεωμετρικούς και αριθμητικούς λόγους, από τους οποίους συνίσταται η αρμονία του σύμπαντος.

Η τρίτη τετρακτύς είναι εκείνη που σύμφωνα με την ίδια αναλογία συμπεριλαμβάνει τη φύση κάθε μεγέθους. Γιατί ό,τι ήταν η μονάδα στην προηγούμενη τετρακτύν, είναι το σημείο σε αυτήν ό,τι ήταν στην προηγούμενη τετρακτύν οι αριθμοί 2 και 3, που είναι εν δυνάμει η πλευρά, είναι τα επεκτεινόμενα είδη μιας γραμμής, η κυκλική και η ευθεία, σε αυτήν την τετρακτύν. Πραγματικά, η ευθεία γραμμή υφίσταται σε συμφωνία με τον άρτιο αριθμό, εφόσον ορίζεται[13] από δυο σημεία· ενώ η κυκλική, σε συμφωνία με τον περιττό αριθμό, επειδή κατανοείται ως μια γραμμή που δεν έχει τέλος. Αλλά αυτό που στην προηγούμενη τετρακτύν ήταν οι τετράγωνοι αριθμοί 4 και 9, είναι σε αυτήν τα δυο είδη των επιφανειών, το ευθύγραμμο και το κυκλικό. Και ό,τι ήταν στην προηγούμενη οι κύβοι αριθμοί 8 και 27, ο ένας όντας άρτιος και ο άλλος περιττός αριθμός, είναι σε αυτή την τετρακτύν τα δυο στερεά, που το ένα έχει κοίλη επιφάνεια,

όπως η σφαίρα και ο κύλινδρος, και το άλλο επίπεδη επιφάνεια, όπως ο κύβος και η πυραμίδα. Αυτή είναι η τρίτη τετρακτύς, που ολοκληρώνει κάθε μέγεθος, από το σημείο, τη γραμμή, την επιφάνεια και το στερεό.

Η τέταρτη τετρακτύς είναι αυτή των απλών σωμάτων, της φωτιάς, του αέρα, του νερού και της γης, τα οποία έχουν αναλογία σύμφωνα με αριθμούς. Διότι αυτό που η μονάδα ήταν στην πρώτη τετρακτύν, είναι η φωτιά σε αυτήν. Η δυάδα είναι αέρας. Η τριάδα είναι νερό. Και η τετράδα είναι γη. Διότι αυτή είναι η φύση των στοιχείων σύμφωνα με την αραιότητα και πυκνότητα των μερών. Η φωτιά έχει προς τον αέρα το λόγο του 1 προς 2, προς το νερό το λόγο 1 προς 3 και προς τη γη το λόγο 1 προς 4. Υπό άλλες θεωρήσεις είναι επίσης ανάλογα μεταξύ τους.

Η πέμπτη τετρακτύς είναι των σχημάτων των απλών σωμάτων. Διότι πράγματι η πυραμίδα είναι το σχήμα της φωτιάς, το οκτάεδρο του αέρα, το εικοσάεδρο του νερού και ο κύβος της γης.

Η έκτη τετρακτύς είναι των πραγμάτων που υπάρχουν σύμφωνα με τη φυτική ζωή. Ο σπόρος είναι ανάλογος προς τη μονάδα και το σημείο. Εάν αυξηθεί σε μήκος, αναλογεί προς τη δυάδα και τη γραμμή· εαν σε πλάτος, προς την τριάδα και την επιφάνεια· και αν σε πυκνότητα, προς την τετράδα και το στερεό.

Η έβδομη τετρακτύς είναι των κοινοτήτων, των οποίων πραγματικά η αρχή και μονάδα είναι ο άνθρωπος, η δυάδα είναι το σπίτι, η τριάδα ο δρόμος και η τετράδα η πόλη. Διότι ένα έθνος απαρτίζεται από αυτά. Αυτά είναι πράγματι η υλική και αισθητή τετρακτύς.

Η όγδοη τετρακτύς αποτελείται από τις δυνάμεις που κρίνουν τα υλικά και αισθητά πράγματα και οι οποίες είναι κάποιας νοητής φύσης. Αυτές είναι ο νους, η επιστήμη, η γνώμη και η αίσθηση. Και πραγματικά, ο νους αντιστοιχεί ουσιαστικά στη μονάδα· η επιστήμη στη δυάδα, διότι επιστήμη είναι η επιστήμη κάποιου πράγματος. Η γνώμη υφίσταται ανάμεσα στην επιστήμη και την άγνοια· αλλά η αίσθηση είναι όπως η τετράδα. Διότι καθώς η αφή που είναι κοινή σε όλες

τις αισθήσεις, είναι τετραπλή, όλες οι αισθήσεις ενεργοποιούνται σύμφωνα προς την επαφή.

Η ένατη τετρακτύς είναι εκείνη από την οποία συντίθεται το ζώον, δηλαδή η ψυχή και το σώμα. Διότι, πράγματι, τα μέρη της ψυχής είναι το λογικό, το θυμικό και το επιθυμητικό, ή εκείνο που επιθυμεί το εξωτερικό καλό, και το τέταρτο είναι το σώμα μέσα στο οποίο υπάρχει η ψυχή.

Η δέκατη τετρακτύς είναι των εποχών του έτους, στη διάρκεια των οποίων όλα τα πράγματα γεννιούνται, δηλαδή η άνοιξη, το καλοκαίρι, το φθινόπωρο και ο χειμώνας.

Και η ενδέκατη είναι των ηλικιών του ανθρώπου, δηλαδή του νήπιου, του έφηβου, του άντρα και του γέρου.

Συνεπώς, υπάρχουν έντεκα τετρακτύες. Η πρώτη είναι εκείνη που υφίσταται σύμφωνα με τη σύνθεση των αριθμών. Η δεύτερη σύμφωνα με τον πολλαπλασιασμό των αριθμών. Η τρίτη υπάρχει σύμφωνα με το μέγεθος. Η τέταρτη είναι των απλών σωμάτων. Η πέμπτη είναι των σχημάτων. Η έκτη είναι των πραγμάτων που υπάρχουν σύμφωνα με τη φυτική ζωή. Η έβδομη είναι των κοινοτήτων. Η όγδοη είναι της κριτικής δύναμης. Η ένατη είναι των μερών ενός ζώου. Η δέκατη είναι των εποχών του έτους. Και η ενδέκατη είναι των ηλικιών του ανθρώπου. Όλες τους όμως έχουν αναλογίες μεταξύ τους. Διότι εκείνο που είναι η μονάδα στην πρώτη και δεύτερη τετρακτύν, είναι το σημείο στην τρίτη, η φωτιά στην τέταρτη, η πυραμίδα στην πέμπτη, ο σπόρος στην έκτη, ο άνθρωπος στην έβδομη, ο νους στην όγδοη και κατά όμοια αντιστοιχία για τις υπόλοιπες. Δηλαδή η πρώτη τετρακτύς είναι 1, 2, 3, 4. Η δεύτερη είναι η μονάδα, η πλευρά, το τετράγωνο και ο κύβος. Η τρίτη είναι το σημείο, η γραμμή, η επιφάνεια και το στερεό. Η τέταρτη είναι φωτιά, αέρας, νερό, γη. Η πέμπτη είναι η πυραμίδα, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο και ο κύβος. Η έκτη είναι ο σπόρος, το μήκος, το πλάτος και το βάθος. Η έβδομη είναι ο άνθρωπος, το σπίτι, ο δρόμος, η πόλη. Η όγδοη είναι νους, επιστήμη, γνώμη, αίσθηση. Η ένατη είναι το λογικό, το θυμικό, το επιθυμητικό και το σώμα. Η δέκατη είναι η άνοιξη, το καλοκαίρι, το φθινόπωρο, ο χει-

μώνας. Η ενδέκατη είναι το νήπιο, ο έφηβος, ο άντρας και ο γέρος.

Ο κόσμος επίσης που συντίθεται από αυτές τις τετρακτύες είναι τέλειος, καθώς είναι αρμονικά διευθετημένος με γεωμετρική, αρμονική και αριθμητική αναλογία, περιλαμβάνοντας κάθε δύναμη, κάθε φύση του αριθμού, κάθε μέγεθος και κάθε απλό και σύνθετο σώμα. Είναι τέλειος, επειδή όλα τα πράγματα είναι μέρη αυτού, αλλά αυτός ο ίδιος δεν αποτελεί μέρος κάποιου άλλου πράγματος. Λέγεται ότι οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποίησαν πρώτοι τον προαναφερθέντα όρκο και αποφάνθηκαν ότι «όλα τα πράγματα μοιάζουν με αριθμό».

Επίσης, οι Πυθαγόρειοι, όπως μαθαίνουμε από τον ανώνυμο συγγραφέα, κατέταξαν σε τέσσερις τάξεις τις αρετές τόσο της ψυχής όσο και του σώματος. Αυτές της ψυχής είναι φρόνηση, σωφροσύνη, ανδρεία και δικαιοσύνη· και οι αντίστοιχες του σώματος είναι οξύτητα των αισθήσεων, υγεία, δύναμη και ομορφιά. Και στα εξωτερικά πράγματα, ευημερία, δόξα, κυριαρχία και φιλία είναι τα αντικείμενα της επιθυμίας.

Επίσης, οι φημισμένες τέσσερις αιτίες του Αριστοτέλη αναφέρονται στην τετράδα, η θεότητα ως η αιτία ή ποιητικό αίτιο, *λόγω της οποίας* (υφ' ού), η ύλη *από την οποία* (έξ ού), η μορφή *διά της οποίας* (δι' ού) και το αποτέλεσμα *προς το οποίο* (πρός ό).

Επιπλέον, ο ανώνυμος συγγραφέας επισημαίνει ότι στην τετράδα παρατηρούνται η συσσώρευση και η αφθονία κατά τον ίδιο τρόπο όπως το πλήθος στην τριάδα, για αυτό το λόγο λέει, αποκαλούμε τους ζωντανούς τρισευλογημένους εξ αιτίας της ευτυχίας τους, αλλά τους νεκρούς, που έχουν ανταλλάξει με τον καλύτερο τρόπο αυτή τη ζωή για την επόμενη, τετράκις ευλογημένους. Αυτά αρκούν σχετικά με την τετράδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

Σχετικά με την πεντάδα.

Η πεντάδα, σύμφωνα πάντα με τα αποσπάσματα του Νικόμαχου, ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους αφιλονικία και αήττητη, συνάφεια ή αλλαγή ποιότητας, φως και δικαιοσύνη, και το ελάχιστο άκρο της ζωτικότητος. Ομοίως Νέμεσις και Βουβάστεια, εκδίκηση και Αφροδίτη, Γαμηλία και Ανδρογυνία, Κυθηρεία και Ζωναία, κυκλικό και ημίθεος, πύργος του Δία, Διδυμαία και σταθερός άξονας. Την τιμούν επίσης με μεγαλοπρέπεια ως αθάνατη και Παλλάδα, Καρδιάτιν και ηγέτιδα, Ακρεώτιν και ισορροπία, άγαμη και Ορθιάτιν, και από τις Μούσες είναι η Μελπομένη.

Από αυτά τα ονόματα, τα τέσσερα πρώτα εξηγούνται ως εξής από τον ανώνυμο συγγραφέα: «Η πεντάδα», λέει, «είναι αλλαγή ποιότητας, επειδή αλλάζει εκείνο το οποίο εκτείνεται τριπλά ή που έχει μήκος, πλάτος και ύψος κατά την ομοιότητα μιας σφαίρας, ως συνέπεια του ότι κινείται κυκλικά[14] και παράγει φως. Για αυτό επίσης ονομάζεται φως. Είναι δε αφιλονικία, επειδή συνθέτει και ενώνει όλα τα πράγματα που διαχωρίζονταν προηγουμένως από διάστημα και εξαιτίας της σύζευξης και της συμφιλίωσης των δυο ειδών (των αριθμών, δηλαδή των άρτιων και των περιττών, εφόσον η πεντάδα αποτελείται από το 3 και το 2). Και είναι δικαιοσύνη, επειδή η πεντάδα αποκαλύπτει στον ύψιστο βαθμό τη δικαιοσύνη στο φως». Ο Αλέξανδρος Αφροδισιεύς στο Σχόλιο του πάνω στο 7ο κεφάλαιο του πρώτου βιβλίου από *τα Μετά τα Φυσικά* του Αριστοτέλη ισχυρίζεται ότι η πεντάδα ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους *αήττητη.* «Επειδή», λέει αυτός, «στο πρώτο ορθογώνιο τρίγωνο που οι πλευρές του είναι ρητοί[15] η μια από τις πλευρές είναι 3, η άλλη είναι 4 και η βάση είναι 5· η βάση εν δυνάμει ισούται και με τις δύο άλλες πλευρές· για αυτό το λόγο την αποκαλούσαν οι Πυθαγόρειοι νικηφόρα και τις άλλες δύο πλευρές ηττημένες. Η πεντάδα, επομένως, ονομαζόταν από αυτούς αήττητη, όντας αξεπέραστη και όντας ανώτερη». Ο ανώνυμος συγγραφέας

παρουσιάζει επίσης τη σημασία αυτής της ονομασίας ως ακολούθως: «Οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν την πεντάδα αήττητη, όχι μόνον επειδή το πέμπτο στοιχείο, ο αιθέρας, που κατατάσσεται ανάλογος προς την πεντάδα και που έχει μια αμετάβλητη ομοιότητα ύπαρξης, λήγει τη διαμάχη και τη μεταβολή των στοιχείων που υπάρχουν κάτω από αυτόν μέχρι τη γη, αλλά επειδή επίσης αυτή συμφιλιώνει και ενώνει τα πρώτα δυο είδη αριθμών που διαφέρουν, τον περιττό και τον άρτιο (δηλαδή το 3 και το 2), αποβαίνουσα η ίδια το σύστημα της σύζευξης τους».

Ο ίδιος συγγραφέας εξηγεί και το λόγο για τον οποίο η πεντάδα ονομαζόταν το ελάχιστο άκρο της ζωτικότητας: «Εφόσον σύμφωνα με τους φυσιολόγους υπάρχουν τρία πράγματα που παράγουν ζωή μετά τη στερεοποίηση, δηλαδή η φυτική, η ψυχική και η λογική δύναμη· και η λογική κατατάσσεται σύμφωνα με την εβδομάδα, ενώ η ψυχική δύναμη σύμφωνα με την εξάδα, άρα η φυτική δύναμη εμπίπτει κατ' ανάγκη στην κατάταξη της πεντάδας· έτσι ώστε η πεντάδα είναι κάποιο ελάχιστο άκρο της ζωτικότητας».

Ο ίδιος επίσης μας πληροφορεί ότι οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν την πεντάδα Νέμεση[16], επειδή αυτή κατανέμει κατά ορθό τρόπο πράγματα ουράνια και θεία και τα φυσικά στοιχεία. Η πεντάδα ονομαζόταν επίσης από τους Πυθαγόρειους Δικαιοσύνη για δυο λόγους, όπως πληροφορούμαστε από τον Πρόκλο *(Σχόλια εις Ησιόδου Έργα και Ημέραι),* σχετίζεται δηλαδή με τη δικαιοσύνη, είτε επειδή τιμωρεί κάποια παράβαση και απομακρύνει την ανισότητα κατοχής, είτε επειδή εξισώνει εκείνο που είναι μικρότερο και ευεργετεί. Και την ονόμασαν Αφροδίτη, σύμφωνα με τον ανώνυμο συγγραφέα, επειδή οι αρσενικοί και οι θηλυκοί αριθμοί αναμιγνύονται. Κατά τον ίδιο τρόπο, προσθέτει αυτός, την αποκαλούσαν Γαμηλία, επειδή η πεντάδα πρώτη συμπεριλαμβάνει το είδος κάθε αριθμού, δηλαδή το 2, τον πρώτο άρτιο, και το 3, τον πρώτο περιττό αριθμό. Ονομάστηκε επίσης γάμος, καθώς συνίσταται από το αρσενικό και το θηλυκό, ενώ την αποκαλούσαν Ανδρογυνία, επειδή όντας περιττός αριθμός, είναι αρσενικού χαρακτήρα. Αλλά την ονόμασαν κυκλική, ε-

πειδή όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, είναι κατ' εξοχήν κυκλικός και σφαιρικός αριθμός. Ομοίως την αποκαλούσαν ημίθεο, όπως μας πληροφορεί ο ανώνυμος συγγραφέας, όχι μόνον επειδή είναι το μισό της δεκάδας, που είναι ένας θείος αριθμός, αλλά επειδή στο σωστό της διάγραμμα κατατάσσεται στο μέσον[17]. Η ονομασία Δίδυμος ή Διδυμέα, διπλή, δόθηκε επειδή αυτή χωρίζει τη δεκάδα, που άλλως είναι αδιαίρετη, σε δυο μέρη. Αλλά την αποκαλούσαν, προσθέτει ο ίδιος συγγραφέας, αθάνατη και Παλλάδα, επειδή αντιπροσωπεύει την πέμπτη ουσία (τον αιθέρα, του οποίου η Παλλάδα προΐσταται).

Επιπλέον, μας πληροφορεί ότι την ονόμαζαν Καρδιάτιν ή Κορδιάλιν λόγω ομοιότητας προς την καρδιά των ζώων, η οποία κατατάσσεται στο μέσο. Την αποκαλούσαν επίσης, σύμφωνα με τον ίδιο πάντα συγγραφέα, Πρόνοια και Δικαιοσύνη, επειδή εξισώνει τα άνισα πράγματα. Όπως η δικαιοσύνη είναι ένα μέσο ανάμεσα στην υπερβολή και την έλλειψη, ομοίως το 5 είναι ο μέσος όλων των αριθμών, οι οποίοι απέχουν εξίσου από αυτό προς τις δυο πλευρές μέχρι τη δεκάδα, κάποιοι από αυτούς το υπερβαίνουν και κάποιοι υπερβαίνονται από αυτό, όπως μπορούμε να δούμε στην ακόλουθη κατάταξη:

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Διότι εδώ, όπως στο μέσο του ζυγού μιας ζυγαριάς, το 5 δεν ξεφεύγει από τη γραμμή της ισορροπίας, ενόσω η μία σκάλα ανεβαίνει και η άλλη κατεβαίνει.

Στην ακόλουθη διάταξη επίσης, δηλαδή 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, θα βρεθεί ότι το άθροισμα των αριθμών που έπονται του 5 είναι τριπλάσιο του αθροίσματος εκείνων που προηγούνται του 5· διότι $6+7+8+9=30$ και $1+2+3+4=10$. Εάν, επομένως, οι αριθμοί σε κάθε πλευρά του 5 αντιπροσωπεύουν το ζυγό μιας ζυγαριάς και το 5 τη γλωττίδα αυτής, όταν ένα βάρος κατεβάζει το ζυγό, μια αμβλεία γωνία παράγεται ανάμεσα στο κατεβασμένο μέρος και τη γλωττίδα, ενώ μια

οξεία γωνία από το ανεβασμένο μέρος του ζυγού. Έτσι, είναι χειρότερο να προκαλείς, παρά να υποφέρεις αδικία· και οι αδικοΰντες κλίνουν προς τα κάτω, προς τα βασίλεια της κόλασης, ενώ οι αδικημένοι τείνουν προς τα πάνω, προς τους Θεούς, ικετεύοντας τη θεία βοήθεια. Άρα, το νόημα της πυθαγορικής παρότρυνσης είναι φανερό, «Μην υπερβαίνεις το ζυγό». Εφόσον όμως η αδικία σχετίζεται με την ανισότητα, προκειμένου να εξαλειφθεί είναι αναγκαία η εξίσωση, ώστε ο ζυγός να μπορεί να παραμείνει και στις δυο πλευρές χωρίς κλίση. Η εξίσωση αυτή επιτυγχάνεται με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Έτσι εάν το 4 προστεθεί στο 5 και αφαιρεθεί επίσης από το 5, ο αριθμός 9 θα παραχθεί στην μια πλευρά και το 1 στην άλλη, το καθένα από τα οποία απέχει εξίσου από το 5. Αν επίσης το 3 προστεθεί στο 5 και ομοίως αφαιρεθεί από αυτό, το 7 και το 3 θα παραχθούν. Προσθέτοντας το 1 στο 5 και αφαιρώντας το από αυτό, το 6 και το 4 θα προκύψουν. Σε όλα αυτά τα παραδείγματα, οι αριθμοί που παράγονται απέχουν εξίσου από το 5 και το άθροισμα κάθε ζεύγους ισούται με 10.

Πληροφορούμαστε επίσης από τον Πλούταρχο, στην πραγματεία του *Περί της Γένεσης της Ψυχής σύμφωνα με τον Πλάτωνα,* ότι οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν την πεντάδα *τροφό, το* οποίο υποδηλώνει έναν ήχο, επειδή θεωρούσαν ότι το πρώτο από τα διαστήματα ενός (μουσικού) τόνου που είναι ικανό να παράγει ήχο είναι το πέμπτο.

Ο Πλούταρχος, στην πραγματεία του σχετικά μ£ το *Ει των Δελφών,* αναφέρει ότι η πεντάδα αποκαλείτο από τους Πυθαγόρειους φύση, «επειδή πολλαπλασιαζόμενη με τον εαυτό της λήγει πάλι στον εαυτό της. Διότι όπως η φύση δέχεται το σιτάρι σε σπόρο και επεκτεινόμενη στο μέσο παράγει πολλά σχήματα και μορφές, μέσω των οποίων επιτυγχάνει το (επιθυμητό) αποτέλεσμα, αλλά στο τέλος παρουσιάζει σιτάρι, αποκαθιστώντας την αρχή στο τέλος όλης της μεταλλαγής, ομοίως, ενώ άλλοι αριθμοί όταν πολλαπλασιάζονται με τον εαυτό τους, λήγουν αυξανόμενοι σε άλλους αριθμούς, το 5 και το 6 μόνον, όσες φορές πολλαπλασιάζονται με τους

εαυτούς τους, παρουσιάζουν και διατηρούν τους εαυτούς τους».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

Σχετικά με την εξάδα.

Οι Πυθαγόρειοι, όπως μαθαίνουμε από τα αποσπάσματα του Νικόμαχου, ονόμαζαν την εξάδα «είδος είδους, το μόνο αριθμό που ταιριάζει στην ψυχή, ευδιάκριτη ένωση των μερών του σύμπαντος, ψυχοποιό και αιτία που παράγει τη ζωτική έξη. Επίσης είναι αρμονία, τελειοποίηση των μερών, και πολύ ορθά είναι η ίδια η Αφροδίτη. Είναι επίσης Ζυγία και Γαμηλία και Ανδρογύναια. Ομοίως είναι Ζυγίτις, καλοκαγαθία, ειρήνη, φιλία, υγεία, Άκμων και αλήθεια. Ανάμεσα στις Μοίρες είναι η Λάχεσις και την αποκαλούν αρχή και το μισό του όλου. Επίσης ονομαζόταν εκατηβελέτις και Τριοδίτις, σχετική με δυο χρόνους και Περσέα, τρίμορφη, Αμφιτρίτη και Αγχίδικος, από τις Μούσες η Θάλεια, καθώς και Πανάκεια».

Όσον αφορά την πρώτη από αυτές τις ονομασίες, *είδος είδους,* ο Μεούρσιους δυστυχώς παρέλειψε να αναφέρει από τον ανώνυμο συγγραφέα το λόγο για τον οποίο καλείται έτσι, όντας ένας απλός λογοκόπος που ικανοποιείται αποσπώντας από το συγγραφέα τις λέξεις «είδος ούν είδους ουκ άν διαμάρτοιμεν αυτήν ηγούμενοι», δηλαδή, «δε θα σφάλλουμε αν θεωρήσουμε αυτήν ως είδος είδους». Ίσως όμως, ονομάστηκε έτσι επειδή το τέλειο είναι εκείνο που χαρακτηρίζει όλα τα είδη ή ιδέες και το 6 είναι ο πρώτος τέλειος αριθμός εν ενεργεία. Οι Πυθαγόρειοι έλεγαν πως η εξάδα είναι ο μόνος αριθμός που αρμόζει στην ψυχή, επειδή η ψυχή, όντας το συνδετικό μέσο ή δεσμός των νοητών και αισθητών, σχετίζεται κατ' εξοχήν με την Αφροδίτη, η οποία -όπως μας πληροφορεί ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Παρμενίδην-* «ενώνει το πλήθος των νοητών και όλων των

όντων» (τήν έν τώ πλήθει κοινωνίαν παρεχόμενη τοις τε νοητοίς, καί πάσι τοις ούσιν). Από τον ανώνυμο συγγραφέα επίσης μαθαίνουμε ότι αποκαλούσαν την εξάδα ευδιάκριτη ένωση των μερών του σύμπαντος, επειδή η ψυχή είναι όπως η ζώσα μορφή της άμορφης ύλης. Και προσθέτει ότι κανείς αριθμός δεν ταιριάζει περισσότερο στην ψυχή από την εξάδα, ή πιο ορθά, μπορεί να ειπωθεί ότι είναι η ψυχοποιός, επειδή έχει βρεθεί ότι παράγει τη ζωτική έξη, από όπου επίσης αντλεί την ονομασία της (ευρισκομένη και της ζωτικής έξεως εμποιητική, παρ' ό εξάς). Για τον ίδιο λόγο ονομάζεται αρμονία, επειδή ακριβώς κάθε ψυχή είναι αρμονική.

Ο ίδιος συγγραφέας σημειώνει ότι «η εξάδα ονομαζόταν τελειοποίηση των μερών από τους Πυθαγόρειους -οι οποίοι αποκαλώντας την έτσι ακολούθησαν τον Ορφέα- είτε επειδή μόνο το έξι από όλους τους αριθμούς της δεκάδας ισούται με τα μέλη ή μέρη του, είτε επειδή το όλον και το σύμπαν διανέμεται σύμφωνα προς τον αριθμό αυτό και διευθετείται αρμονικά». Σχετικά με την ονομασία Αφροδίτη, μαθαίνουμε από το βιβλίο 7 του Μαρτιάνους Κάπελα (Martianus Capella) ότι της αποδόθηκε, «επειδή μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή είναι η πηγή της αρμονίας. Διότι 6 προς 12 σχηματίζει τη συμφωνία δια πασών 6 προς 9 τη συμφωνία δια πέντε και 6 προς 8 τη συμφωνία δια τεσσάρων εξ αυτού λέγεται ότι είναι η Αφροδίτη, η μητέρα της αρμονίας».

Η εξήγηση των επιθέτων *γαμηλία* και Ανδρογύναια, τα οποία στον ανώνυμο συγγραφέα είναι *«γάμος»* και *«αρρενοθήλυς»,* είναι ότι «η εξάδα παράγεται από τη δύναμη και τον πολλαπλασιασμό του πρώτου περιττού και του πρώτου άρτιου αριθμού, που είναι αρσενικό και θηλυκό αντίστοιχα και έτσι ονομάζεται αρρενοθήλυς, δηλαδή *αρσενικό και θηλυκό.* Ομοίως, αποκαλείται γάμος επειδή είναι η ίδια ίση με τα μέρη της, έργο δε του γάμου είναι να γεννά γόνους όμοιους προς τους γονείς». Το επίθετο *«φιλοτησία»,* καλοκαγαθία, στον ανώνυμο συγγραφέα απαντάται ως «φιλίωσις», δηλαδή φιλία και αγάπη, «και», λέει αυτός, «ορθά ονομάζεται έτσι επειδή αυτή συνενώνει το αρσενικό και το θηλυκό». Επιπλέον, ο ανώνυμος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι «η

εξάδα ονομαζόταν υγεία και κάλλος εξαιτίας της πληρότητας και της συμμετρίας των μερών της». Διότι η υγεία είναι συμμετρία και ύπαρξη σύμφωνη προς τη φύση των μερών του σώματος.

Ομοίως από τον ίδιο συγγραφέα μαθαίνουμε ότι «την αποκαλούσαν *Άκμωνα,* εννοώντας *ακαταπόνητη* (τήν οίον ακάματον), επειδή τα πρώτιστα τρίγωνα των κοσμικών στοιχείων συμμετέχουν σε αυτήν, καθώς το καθένα τους γίνεται έξι, αν τμηθεί από τρεις καθέτους».

Η ονομασία *αλήθεια* πιθανόν της αποδόθηκε επειδή αλήθεια είναι η αρμονική σύζευξη εκείνου που γνωρίζει με αυτό που γίνεται γνωστό· και η εξάδα, όπως δείξαμε προηγουμένως, είναι κατ' εξοχήν αρμονική.

Και πάλι, σύμφωνα με τον ανώνυμο συγγραφέα, ονομαζόταν βάλλουσα μακράν (εκατηβηλέτις), Τριοδίτις[18] και σχετική με δύο χρόνους. Το πρώτο από αυτά της αποδόθηκε επειδή η τριάδα είναι η *Εκάτη που βάλλει* (βολήσασαν) και κατά κάποιο τρόπο ενώνεται με άλλη μια τριάδα και παράγει την εξάδα. «Ονομάστηκε δε Τριοδίτις,» λέει ο ίδιος, «ίσως από τη φύση της θεάς. Είναι πιθανό ότι ονομάστηκε έτσι επειδή πρώτος αυτός ο αριθμός διαθέτει τις κινήσεις των τριών διαστάσεων (μήκος, πλάτος και ύψος), καθεμία από τις οποίες λαμβάνει μια διπλή διαίρεση από τις περιστάσεις· (δηλαδή η κίνηση κατά μήκος είναι είτε πίσω είτε εμπρός, κατά πλάτος είναι είτε δεξιά είτε αριστερά, και κατά ύψος είναι είτε πάνω είτε κάτω). Αλλά ονομάστηκε σχετική με δύο χρόνους από τη διαίρεση ολόκληρου του χρόνου, βάσει των έξι σημείων του ζωδιακού πάνω και των έξι κάτω από τη γη. Ή, επειδή ο χρόνος είναι συναφής προς την τριάδα, εφόσον αποτελείται από τρία μέρη και η εξάδα σχηματίζεται από δυο τριάδες».

Τα ονόματα Περσέα και τρίμορφη της δόθηκαν για τον ίδιο λόγο που ονομαζόταν Τριοδίτις· διότι είναι πολύ γνωστό ότι η Άρτεμις είναι τρίμορφη και η θεά αυτή ονομάστηκε Περσεία από τον Ορφέα στην εισαγωγή των ύμνων του. Πληροφορούμαστε επίσης από τον ανώνυμο συγγραφέα ότι η εξάδα ονομαζόταν Αμφιτρίτη, επειδή έχει μια τριάδα σε

κάθε πλευρά της· και Αγχίδικος (εγγύς της δίκης) επειδή αυτή είναι ιδιαίτερα κοντινή στην πεντάδα, η οποία καθώς ήδη έχουμε αναφέρει, ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους *δίκη* ή Δικαιοσύνη.

Τέλος, ο ίδιος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι ονομαζόταν Θάλεια και Πανάκεια[19], το πρώτο εξαιτίας της αρμονίας της σύνθεσης της. Αυτό το συμπεραίνω από τις λέξεις «διά τήν των ετέρων αρμονίαν», «εξαιτίας της αρμονίας των διαφορετικών», εφόσον ο ίδιος συγγραφέας προσθέτει ότι «πολύ πριν από αυτό την αποκαλούσαν *κόσμο,* επειδή ο κόσμος, όπως ακριβώς το 6, φαίνεται συχνά ότι αποτελείται από αντίθετα, διευθετημένα αρμονικά». Και το έξι συγκροτείται από πολλαπλασιασμό των δύο αντίθετων αριθμών 2 και 3, που το ένα είναι άρτιο και το άλλο περιττό, το ένα είναι ανάλογο προς το αρσενικό και το άλλο προς το θηλυκό. Τέλος το όνομα Πανάκεια της δόθηκε για τους ίδιους λόγους που της δόθηκε και η ονομασία υγεία, ή επειδή ως «πανάρκεια» ήταν επαρκώς εφοδιασμένη με μέρη προς την τελειοποίηση του όλου της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

Σχετικά με την επτάδα.

Η επτάδα, όπως πληροφορούμαστε από τον ανώνυμο συγγραφέα και Συγγραφέα των Ετυμολογικών, ονομάστηκε έτσι από το ρήμα *σέβω,* που υποδηλώνει σεβασμό, όντας κάποια σεπτάς, ως θεία και χωρίς μητέρα και παρθένα (σεπτάς τις ούσα, ως θεία και αμήτωρ και παρθένος). Και οι ονομασίες που δόθηκαν σε αυτήν από τους Πυθαγόρειους, καθώς μαθαίνουμε από τα αποσπάσματα που έχει παραθέσει ο Νικόμαχος, είναι οι ακόλουθες: «Τύχη και Καιρός, Αθηνά, Άρης και Ακρεώτις, Αγγελία και Ατρυτώνη[20], Φυλακίτις και Οβριμοπάτρη ή θυγατέρα ενός ισχυρού πατέρα, Τριτογένεια[21] και Γλαυκώπις ή γαλανομάτα, Αλαλκομενία και Παντευχία, Ερ-

γάνη και Πολυάρετη ή ταλαντούχα, ακεραιότητα των μερών, και το κέρας της Αμάλθειας, Αιγίς και Όσιρις, όνειρο και φωνή, ήχος, και από τις Μούσες η Κλειώ. Στα παραπάνω επίσης μπορούν να προστεθούν, κρίση και Αδράστεια».

Τα επίθετα Τύχη, καιρός, Αθηνά, Τριτογένεια και φωνή, εξηγούνται από τον ανώνυμο συγγραφέα ως εξής: «Η επτάδα καλείται Αθηνά, επειδή, όπως λένε οι μύθοι για τη θεά, είναι παρθένα και άγαμη· δε γεννήθηκε ούτε από μητέρα, που είναι ο άρτιος αριθμός, ούτε από πατέρα, που είναι ο περιττός αριθμός, αλλά όπως η Αθηνά γεννήθηκε από το κεφάλι του πατέρα όλων των πραγμάτων, έτσι και η επτάδα προέρχεται από τη μονάδα, την κεφαλή ή κορυφή των αριθμών. Και μοιάζει με κάποια αρρενωπή Αθηνά, γιατί ο αριθμός που μπορεί εύκολα να διαιρεθεί, είναι θηλυκός. Επίσης, ονομάστηκε καιρός, επειδή οι αποφασιστικές της ενέργειες σε θέματα υγείας ή ασθένειας, γέννησης ή φθοράς, επιτελούνται σε σύντομο χρόνο. Και είναι Τύχη επειδή, κατά παρόμοιο τρόπο με όσα λέγονται για τούτη τη θεά στους μύθους, κυβερνά τις θνητές υποθέσεις, και κατά κάποιον τρόπο αιτιωδώς και ευκαιριακά εμφανίζεται και αποφασίζει. Ομοίως, ονομάζεται φωνή, επειδή υπάρχουν επτά στοιχειώδεις φθόγγοι, όχι μόνο στην ανθρώπινη φωνή, αλλά και σε κάθε οργανικό, επίγειο και αρμονικό ήχο. Τούτο συμβαίνει, όχι μόνο επειδή οι πρώτοι αρμονικοί ήχοι εκπέμπονται, καθώς μαθαίνουμε, από επτά πλανήτες, αλλά επίσης επειδή το πρώτο διάγραμμα με μουσικούς είναι το επτάχορδο. Ονομάζεται δε Τριτογένεια, επειδή τα είδη ή μέρη της ψυχής, αν και είναι τρία, δηλαδή το λογικό, το θυμικό και το επιθυμητικό, γεννούν τέσσερις τελειότατες αρετές, ακριβώς όπως από τις τρεις διαστάσεις (μήκος, πλάτος και ύψος) υπάρχουν τέσσερα όρια στη σωματική ανάπτυξη (δηλαδή το σημείο, η γραμμή, η επιφάνεια και το στερεό)».

Όσον αφορά το επίθετο Αγγελία, ο ίδιος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι «η επτάδα ονομάστηκε έτσι διότι συλλέχθηκε και συναθροίστηκε (από του συνειλήσθαι και συνήχθαι) σε μια αυτοτελή φύση, εφόσον δε διαιρείται παρά μόνο από εκείνο προς το οποίο είναι ομώνυμη[22]. Ή ονομάστηκε έτσι,

επειδή όλα τα φυσικά αποτελέσματα *οδηγούνται* μέσω αυτής σε τελειοποίηση (ή από του πάντα αγαγεναι δι' αυτής τα φυσικά αποτελέσματα εις τελείωσιν). Άλλη εκδοχή, περισσότερο προσαρμοσμένη στη διδασκαλία των Πυθαγορείων, είναι ότι ονομάστηκε έτσι, επειδή οι πιο διάσημοι Βαβυλώνιοι, μεταξύ αυτών ο Οστάνης και ο Ζωροάστρης, πολύ ορθώς αποκαλούν τις αστρικές σφαίρες *αγέλες* (αγέλαι)· είτε επειδή μόνο αυτές μεταξύ των σωματικών μεγεθών περιφέρονται τέλεια γύρω από ένα κέντρο, είτε -κατ' αντιστοιχία με τους Χρησμούς- επειδή θεωρούνται κατά έναν τρόπο σύνδεσμοι και συλλέκτες των φυσικών αιτιών, οπότε στους ιερούς λόγους τους αποκαλούνται επίσης *αγέλαι,* και με την προσθήκη ενός *γάμμα,* άγγελοι. Για αυτό, ομοίως ονομάζουν τα αστέρια και τους δαίμονες που κυβερνούν καθεμία από αυτές τις αγέλες (ή αστρικές σφαίρες) αγγέλους και αρχαγγέλους, που είναι επτά στον αριθμό».

Επιπλέον, ο ίδιος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι «η επτάδα ονομαζόταν Φυλακίτις, όντας προστατευτικής φύσης, όχι μόνο επειδή οι προαναφερθέντες άγγελοι και αρχάγγελοι είναι επτά ηγέτες, αλλά και επειδή οι αστέρες που φρουρούν το σύμπαν και το διατηρούν σε συνοχή και αιώνια μονιμότητα είναι επτά στον αριθμό».

Τα επίθετα Οβριμοπάτρη και Γλαυκώπις είναι φανερό ότι προήλθαν από τη συσχέτιση της επτάδας με την Αθηνά. Το ισχύει και για τους προσδιορισμούς Παντευχία και Εργάνη. Διότι η Αθηνά, ως μια από τους Κουρήτες, λατρευόταν με την πρώτη από τις ονομασίες αυτές, που σημαίνει ότι είναι εφοδιασμένη με πλήρη πανοπλία. Έτσι, το επίθετο *πάντευχος* δόθηκε σε αυτήν από τους Χαλδαϊκούς Χρησμούς. Ο Πλάτωνας επίσης στους *Νόμους* λέει ότι αυτή είναι στολισμένη με πλήρη πανοπλία (πανοπλία παντελεί κοσμηθείσα). Και Εργάνη ή τεχνίτρα είναι ακόμη ένα πολύ γνωστό όνομα της Αθηνάς.

Ονομάστηκε δε η επτάδα το κέρας της Αμάλθειας, πιθανώς για τον ίδιο λόγο με την τριάδα, από τη συνάφεια της προς τη μονάδα, την πηγή κάθε θείου αγαθού. Αλλά φαίνεται ότι ονομάστηκε Αιγίς, επειδή η Αθηνά ετιμάτο ως αιγι-

φόρος θεά, και αυτό, όπως μας πληροφορεί ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις Πλάτωνος Τίμαιον,* επειδή η αλυσίδα της Μοίρας που όλα τα ενώνει, κινείται από αυτή τη θεά, από την οποία επίσης προέρχονται όλες οι εύπλαστες ενέργειές της. Τέλος, η επτάδα αποκαλέσθηκε, όπως μαθαίνουμε από τον ανώνυμο συγγραφέα, Τελεσφόρος και Κρίση, το πρώτο επειδή ο έβδομος μήνας είναι γόνιμος και το τελευταίο επειδή στις ασθένειες η έβδομη μέρα είναι η κρίσιμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ

Σχετικά με την ογδοάδα.

«Ο αριθμός οκτώ», λέει ο ανώνυμος συγγραφέας, «είναι ο πρώτος κύβος εν ενεργεία και είναι ο μόνος αρτιάκις άρτιος αριθμός μέσα στη δεκάδα». Η δύναμη του αριθμού αυτού είναι τόσο μεγάλη που σύμφωνα με μια ελληνική παροιμία, «όλα είναι οκτώ». Αυτή η παροιμία, όπως μας πληροφορεί ο προαναφερθείς συγγραφέας, προήλθε από το γεγονός ότι όλα τα πράγματα γίνονται κατανοητά στην όγδοη ουράνια σφαίρα.

Σύμφωνα με τα αποσπάσματα από το Νικόμαχο, τα ονόματα που δόθηκαν στον αριθμό αυτό από τους Πυθαγόρειους είναι τα ακόλουθα: «Παναρμόνιος και Καδμεία, μητέρα και Ρέα, παραγωγική αιτία των θηλυκών και Κυβέλη, Κυβήβη και Δινδυμήνη, προστάτιδα θεά, αγάπη και φιλία, Μήτις[23] σύλληψη και Ορεία, Θέμις, νόμος, ανωριμότητα και από τις Μούσες η Ευτέρπη».

Όσον αφορά το «Παναρμόνιος», το πρώτο από τα επίθετα, ο Καμεράριους[24] (Camerarius) μας πληροφορεί (χωρίς αμφιβολία από το έργο του ανώνυμου συγγραφέα που ανα-

φέρθηκε παραπάνω) ότι οι Πυθαγόρειοι διέκριναν μουσικούς λόγους από αυτόν τον αριθμό και σύμφωνα με αυτούς εξήγησαν το εγκόσμιο σύστημα, ως ακολούθως: Ο λόγος του 9 προς το 8 είναι επόγδοος. Αυτός σχηματίζει έναν τόνο και αποδίδεται στη σελήνη. Ο λόγος του 12 προς το 9 είναι επίτριτος και ο λόγος του 12 προς το 8 είναι ημιόλιος. Οι λόγοι αυτοί αποδίδονται στον πλανήτη Ερμή. Κατά όμοιο τρόπο ο λόγος του 16 προς το 12 είναι επιτέταρτος και του 16 προς το 8 είναι δύο προς ένα και αποδίδονται στον πλανήτη Αφροδίτη. Ο λόγος του 18 προς το 12 είναι ημιόλιος, του 18 προς το 9 δύο προς ένα και αποδίδονται στον Ήλιο. Ο λόγος του 21 προς 9, που είναι διπλασιεπίτριτος, αποδίδεται στον πλανήτη Άρη. Ο λόγος του 24 προς 18, που είναι επιτέταρτος, του 24 προς 12, που είναι δύο προς ένα, του 24 προς 8, που είναι τρία προς ένα, καθώς και οι λόγοι του 18 προς το 12 και του 12 προς το 8, οι οποίοι είναι ημιόλιοι, αποδίδονται όλοι στο Δία. Οι λόγοι του 32 προς 24, που είναι επίτριτος, και του 32 προς 8, που είναι τέσσερα προς ένα, αποδίδονται στον Κρόνο. Τέλος, ο λόγος του 36 προς 24, ο οποίος είναι ημιόλιος, του 36 προς 9, ο οποίος είναι τέσσερα προς ένα, και του 24 προς 18 ο οποίος είναι επίτριτος, αποδίδονται στην όγδοη ή σταθερή σφαίρα, που συμπεριλαμβάνει όλες τις άλλες. Για αυτό το λόγο η ογδοάδα ονομάστηκε από τους Πυθαγόρειους Καδμεία, επειδή η Αρμονία λέγεται ότι ήταν η γυναίκα του Κάδμου. Και Κάδμος, καθώς μαθαίνουμε από τον Ολυμπιόδωρο, είναι ο επίγειος κόσμος.

Όσον αφορά τα ονόματα μητέρα, Ρέα, Κυβέλη και Δινδυμήνη αναμφίβολα αποδίδονταν στην ογδοάδα, η οποία ήταν ο πρώτος κύβος· και ο κύβος είναι το στοιχείο της γης στο οποίο συμμετέχει η Ρέα, που είναι ίδια θεότητα με τη Δήμητρα και λατρευόταν ως Κυβέλη και Δινδυμήνη. Όπως επίσης η Ρέα είναι η ζωογονούσα θεά, η ζωή που πηγάζει από αυτή πρέπει να έχει θηλυκά χαρακτηριστικά· άρα είναι φανερός ο λόγος για τον οποίο η ογδοάδα τιμάται ως η παραγωγική αιτία των θηλυκών. Το όνομα Κυβέλη, μητέρα των

θεών, της δόθηκε επειδή ήταν η αιτία θείας έμπνευσης για τους μυστικιστές[25].

Επίσης ο ανώνυμος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι αποκαλούσαν τον αριθμό αυτό *Ευτέρπη,* επειδή είναι η *πλέον μεταβλητή* (μάλιστα εύτρεπτος) από όλους τους αριθμούς μέσα στη δεκάδα, καθώς είναι αρτιάκις άρτια, και αυτό μέχρι τη μονάδα που είναι φυσικά αδιαίρετη[26].

Από το Μακρόβιο επίσης μαθαίνουμε ότι «η ογδοάδα ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους δικαιοσύνη, επειδή είναι ο πρώτος αριθμός που αναλύεται σε αρτιάκις άρτιους αριθμούς, δηλαδή σε τέσσερα και τέσσερα, που το καθένα τους μπορεί επιπλέον να διαιρεθεί σε αριθμούς αρτιάκις άρτιους, δηλαδή σε δύο και δύο. Η σύνθεσή της επίσης είναι της ίδιας ποιότητας όπως η ανάλυση της διότι είναι δυο φορές το δύο επί δύο. Εφόσον επομένως η σύνθεση της προέρχεται από μια άρτια ισότητα και η ανάλυση της επιστρέφει εξίσου μέχρι τη μονάδα, η οποία δε διαιρείται με ένα αριθμητικό λόγο, η ογδοάδα επάξια κατέχει την ονομασία της δικαιοσύνης εξαιτίας της ισομερούς διαίρεσης της».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI

Σχετικά με την εννεάδα.

Σύμφωνα με τα αποσπάσματα του Νικόμαχου, η εννεάδα ετιμάτο από τους Πυθαγόρειους ως «ρέουσα γύρω από τους άλλους αριθμούς εντός της δεκάδος, όπως ο ωκεανός. Επίσης, ονομαζόταν από εκείνους ορίζοντας, Προμηθέας και Ομόνοια, Περσεία και Άλιος, ανεικία και ομοίωση, Ήφαιστος και Ήρα, η αδελφή και σύζυγος του Δία, Εκάεργος και Παιάν, Νυσσηίς και Αγυιάτις, Ενυάλιος και Αγελία, Τριτογένεια και Πειθώ, Κουρήτις και Περσεφόνη, Υπερίων, και από τις Μούσες η Τερψιχόρη».

Από τις ονομασίες αυτές, ο ωκεανός και ο ορίζοντας εξηγούνται από τον ανώνυμο συγγραφέα ως εξής: «Ότι δεν

μπορεί να υπάρξει κανένας αριθμός εκτός της εννεάδας και ότι αυτή τους περικλείει όλους μέσα της, γίνεται φανερό από την επαναφορά των αριθμών. Διότι η φυσική πορεία τους είναι μέχρι το 9, κατόπιν λαμβάνει χώρα η αναστροφή τους· το 10 γίνεται σαν να ήταν πάλι η μονάδα. Έτσι, αν από καθένα από τους αριθμούς 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 και 19 αφαιρεθεί ο αριθμός 9, οι αριθμοί που απομένουν θα είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Και αντίστροφα, η πρόοδος θα αυξάνεται με την πρόσθεση του 9. Αν δηλαδή στον καθένα από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, προστεθεί το 9, οι αριθμοί που θα παραχθούν θα είναι 10, 11, 12, 13, 14, κ.λπ. Ομοίως, εάν αφαιρέσουμε από το 20 το διπλάσιο του 9, από το 30 το τριπλάσιο του 9, από το 40 το τετραπλάσιο του 9, από το 50 το πενταπλάσιο του 9, τότε θα παραχθούν οι αριθμοί 2, 3, 4, 5, 6, κ.λπ. Επίσης, αφαιρώντας από το 100 το ενδεκαπλάσιο του 9, επιστρέφουμε πάλι στη μονάδα. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συνεχίσουμε επ' άπειρον. Άρα, δεν είναι δυνατό να υπάρχει κάποιος στοιχειώδης αριθμός πέραν της εννεάδας. Ως εκ τούτου, οι Πυθαγόρειοι την αποκάλεσαν ωκεανό και ορίζοντα, επειδή όλοι οι αριθμοί περιλαμβάνονται σε αυτή και περιστρέφονται εντός της. Για τον ίδιο λόγο ονομάστηκε Άλιος (παρά το αλίζειν), ομόνοια και Περσεία, επειδή αυτή συγκεντρώνει όλους τους αριθμούς και τους συνδέει σε ένα, και δεν επιτρέπει να διασκορπιστεί η ένωση των αριθμών πέραν αυτής».

Σχετικά με την ονομασία Προμηθέας, πληροφορούμαστε από τον ανώνυμο συγγραφέα ότι η εννεάδα έλαβε αυτό το όνομα επειδή δεν επιτρέπει σε κανέναν αριθμό, εκτός των εννέα που βρίσκονται στις θέσεις των μονάδων, να προηγείται αυτής (από του μή εάν τινά πρόσω αυτής χωρείν αριθμόν). Και προσθέτει: «Και αυτό είναι εύλογο· διότι, καθώς είναι τρεις φορές τέλεια, δεν επιδέχεται καμία αύξηση· αλλά καθώς απαρτίζεται από δύο κύβους, δηλαδή το 1 και το 8, και είναι η ίδια τετράγωνο, είναι ο μόνος αριθμός μέχρι τον εαυτό της που έχει τρίγωνο[27] για πλευρά του».

Ο ίδιος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι η εννεάδα ονομαζόταν ανεικία εξαιτίας της ανταπόδοσης και της μετάθε-

σης των αριθμών από αυτή μέχρι τη μονάδα. Με αυτό υποθέτω ότι αναφέρεται στην εξίσωση μέσω πρόσθεσης και αφαίρεσης, την οποία αναφέραμε προηγουμένως στο κεφάλαιο σχετικά με την πεντάδα. Και λέει ότι ίσως ονομάστηκε ομοίωση επειδή το 9 είναι ο πρώτος περιττός τετράγωνος αριθμός. Λέγεται δε ότι το είδος του περιττού αριθμού είναι εξομοιωτικό μέσω του όλου του, ενώ το είδος του άρτιου αριθμού είναι ανόμοιο. Επιπλέον, ο τετράγωνος αριθμός είναι εξομοιωτικός, ενώ ο ετερομήκης είναι ανόμοιος. Ίσως πάλι ονομάστηκε έτσι, επειδή είναι κυρίως όμοια προς την πλευρά της. Διότι, όπως η πλευρά της κατέχει την τρίτη θέση στη φυσική ακολουθία των αριθμών, ομοίως η εννεάδα είναι ο τρίτος αριθμός σε μια πρόοδο σύμφωνη με αναλογία[28].

Και συνεχίζει λέγοντας πως ονομάστηκε Ήφαιστος επειδή η πορεία των αριθμών μέχρι το 9 είναι όπως η πορεία των πραγμάτων που αποσυντίθενται από τη φωτιά μέχρι τη σφαίρα του πυρός (δηλαδή την κορυφή του αέρα). Ονομάστηκε δε Ήρα, επειδή η σφαίρα του αέρα κατατάσσεται σύμφωνα με αυτόν τον αριθμό. Και την αποκάλεσαν αδελφή και σύζυγο του Δία, εξαιτίας της σύνδεσης της με τη μονάδα· ενώ Εκάεργο[29] επειδή εμποδίζει την παραπέρα πρόοδο των αριθμών (από του είργειν την εκάς πρόβασιν του αριθμού). Το επίθετο Νυσσηίς κατά τον ανώνυμο συγγραφέα είναι Νυσσηίτα· και μας πληροφορεί ότι η εννεάδα ονομάστηκε έτσι, επειδή διεισδύει[30] (από του επινύσσαν) και κατατάσσεται σαν κάποιο όριο στην πρόοδο των αριθμών.

Ο Μαρτιάνους Κάπελα μας πληροφορεί ότι η επωνυμία Ενυάλιος, η οποία υποδηλώνει τον Άρη, δόθηκε στην εννεάδα, επειδή είναι το άκρο της πρώτης σειράς των αριθμών (δηλαδή των αριθμών της δεκάδας)· και ότι το τέλος όλων των πραγμάτων προέρχεται από τον Άρη. Όσο για τα επίθετα Κουρήτις και Περσεφόνη, μαθαίνουμε από τον ανώνυμο συγγραφέα ότι η εννεάδα κατέχει αυτές τις ονομασίες επειδή απαρτίζεται από τρεις τριάδες· η τριάδα σχετίζεται τόσο με τους Κουρήτες όσο και με την Περσεφόνη. Από τον ίδιο συγγραφέα μαθαίνουμε ότι ονομάστηκε Υπερίων, επειδή προχώρησε σε ένα μέγεθος που υπερβαίνει τους άλλους

αριθμούς (μέσα στη δεκάδα)· και Τερψιχόρη, επειδή τρέπει και προκαλεί την επαναφορά και τη σύγκλιση των παραγωγικών αρχών σαν σε κυκλικό χορό (από τού τρέπειν και ως χορόν ανακυκλούν την των λόγων παλιμπέτειαν και σύνευσιν). Ο ίδιος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι ονομαζόταν και Τελεσφόρος, *ή φέρουσα σε τέλος,* επειδή τελειοποιεί και ολοκληρώνει τους γόνους που γεννιούνται σε εννέα μήνες· και επίσης *τέλεια,* επειδή παράγεται από την τριάδα, η οποία είναι τέλεια. Η εννεάδα ομοίως μπορεί να ειπωθεί ότι είναι τελειοποιός, όπως μαθαίνουμε από τον Πρόκλο στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιον,* σελ. 298, «επειδή αυτή ολοκληρώνει τη δημιουργία της γένεσης». Διότι, λέει ο ίδιος, «αυτός ο αριθμός αρμόζει στη γένεση (δηλαδή στο επίγειο βασίλειο)· εφόσον αυτή προχωρά από τη μονάδα μέχρι τους τελευταίους αριθμούς χωρίς παλινδρόμηση· και αυτή είναι η ιδιαιτερότητα της γένεσης». Αρκετά λοιπόν με τις ονομασίες της εννεάδας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

Σχετικά με τη δεκάδα.

Η δεκάδα, σύμφωνα με τα αποσπάσματα του Νικόμαχου, ονομαζόταν από τους Πυθαγόρειους, «κόσμος, ουρανός, ειμαρμένη, αιωνιότητα, κράτος, πίστη, ανάγκη, Άτλας, ακαταπόνητη, Θεός, Φάνης, ο ήλιος, Ουρανία, μνήμη και Μνημοσύνη».

Ο ανώνυμος συγγραφέας μας πληροφορεί ότι η πρώτη από αυτές τις ονομασίες, *κόσμος,* δόθηκε στη δεκάδα «διότι *όλα* τα πράγματα είναι διευθετημένα σύμφωνα με αυτήν, τόσο καθολικά όσο και μερικά». Και όπως παρατηρεί ο Πρωτοσπαθάριος (στις Ημέρες του Ησιόδου) ονομάστηκε *δεκάδα,* διότι *περιέχει μέσα της* κάθε αριθμό (ώς δεχομένην πάντα αριθμόν έφ' εαυτού). Ο Πρόκλος ομοίως μας πληροφορεί ότι «η δεκάδα, όπως λέει ο Πυθαγόρειος ύμνος, αυτός ο θείος

αριθμός προχωρά από τα άφθαρτα καταφύγια της μονάδας, μέχρις ότου φθάσει στη θεία τετράδα, η οποία γέννησε τη μητέρα όλων των πραγμάτων, τα πάντα δεχόμενη, σεβάσμια, όριο όλων των πραγμάτων, αναλλοίωτη και ακαταπόνητη, που και οι αθάνατοι Θεοί όσο και οι γεννημένοι στη γη άνθρωποι ονομάζουν ιερή δεκάδα». Και ο Πρόκλος προσθέτει ότι «η μονάδα και τα άφθαρτα καταφύγια της υποδηλώνουν σε αυτούς τους στίχους εκείνη την αμετάβλητη και απόκρυφη αιτία, το *ένα* όν (που χαρακτηρίζεται δηλαδή από *το ένα* και που είναι η κορυφή της νοητικής τάξης), ενώ η θεία τετράδα είναι η εξέλιξη προς το φως του νοητικού πλήθους, που αποκαλύπτεται από τη δυάδα, που είναι ανάμεσα στη μονάδα και την τετράδα, και η δεκάδα είναι ο κόσμος, που δέχεται τις εικόνες όλων των θείων αριθμών, που ουράνια μεταδίδονται σε αυτήν»[31].

Η δεκάδα ονομάστηκε ουρανός, όπως μαθαίνουμε από τον ανώνυμο συγγραφέα, «διότι είναι το τελειότατο όριο του αριθμού και πήρε το όνομα *δεκάς,* σαν να ήταν *δεχάς,* δέκτης, όπως ακριβώς ο ουρανός είναι υποδοχέας όλων των πραγμάτων». Όσον αφορά το επίθετο ειμαρμένη, πληροφορούμαστε από τον ίδιο συγγραφέα ότι «αποκαλούσαν έτσι τη δεκάδα επειδή δεν υπάρχει καμία ιδιότητα, ούτε στους αριθμούς, ούτε στα πράγματα που υπάρχουν σύμφωνα προς τη σύνθεση του αριθμού, που να μην περιέχεται εν σπέρματι μέσα στη δεκάδα και τους αριθμούς εντός της. Αυτή εκτείνεται με συνοχή και συνέχεια στους αριθμούς που έπονται. Έτσι είναι ειμαρμένη, καθώς απομακρύνεται από τη μονάδα συγκροτημένα και ορθά διευθετημένη». Ομοίως, όπως η δεκάδα εμπεριέχει κάθε αριθμό και οι αριθμοί είναι άπειροι, πιθανώς εξαιτίας αυτού επονομάστηκε αιωνιότητα· διότι αιωνιότητα είναι η άπειρη ζωή. Λέω πιθανώς, διότι ο Μεούρσιους ανόητα παραλείπει τους λόγους που αναφέρονται από τον ανώνυμο συγγραφέα για αυτές τις ονομασίες, όπως επίσης για εκείνες της πίστης και της ανάγκης. Όσο για την ονομασία Άτλας, ο ανώνυμος συγγραφέας παρατηρεί ότι «η δεκάδα έλαβε αυτό το όνομα ως μνεία στον Τιτάνα Άτλα-

ντα, ο οποίος μυθολογείται ότι στηρίζει τους ουρανούς πάνω στους ώμους του. Ο Όμηρος αναφέρει για αυτόν:

Και οι ψηλές στήλες που πάνω τους τη γη
αυτός σηκώνει,
στον έναστρο θόλο καταλήγουν
και τις σφαίρες στηρίζουν.

Αλλά η δεκάδα διαφυλάσσει την αιτία ή τις παραγωγικές αρχές των σφαιρών, σαν κάποια διάμετρος, συμπλεκόμενη και εμπεριέχουσα αυτές με τον πιο συγκροτημένο τρόπο».

Όσον αφορά το όνομα Φάνης, καθώς η δεκάδα ονομάστηκε κόσμος και καθώς ο Φάνης, που υπάρχει ως το άκρο της νοητής τάξης, είναι το παράδειγμα του κόσμου, είναι φανερός ο λόγος για τον οποίο της αποδόθηκε αυτή η επωνυμία. Μπορούμε δε να προσθέσουμε ότι ο Φάνης, ο οποίος είναι το *αυτόζωον* του Πλάτωνα, εμπεριέχει τις πρώτες ιδέες, οι οποίες είναι τέσσερις και το 4 είναι παραδειγματικούς ή αιτιατώς το 10. Από τον ανώνυμο συγγραφέα μαθαίνουμε ότι την αποκαλούσαν κράτος, επειδή οι επίγειες φύσεις υποστηρίζονται από αυτήν και επειδή αυτή φαίνεται να κυβερνά τους άλλους αριθμούς. Είναι επίσης οχυρό και δέκτης όλων των αιτιών ή παραγωγικών αρχών, από όπου και καλείται *κλειδούχος.* Ομοίως, σύμφωνα με τον Κεδρηνό, «ονομάστηκε *κλαδούχος* ή η *φέρουσα τους κλάδους,* επειδή όλοι οι αριθμοί (κατόπιν αυτής) βλαστάνουν από αυτήν, σαν κλαδιά». Σύμφωνα με τον Ανατόλιο, καθώς μαθαίνουμε από τον ανώνυμο συγγραφέα, «η δεκάδα ονομάστηκε κράτος και παντέλεια, επειδή αυτή οριοθετεί κάθε αριθμό, εμπεριέχοντας τη φύση του άρτιου και του περιττού, του κινητού και του ακίνητου, του κακού και του αγαθού». Τέλος, σύμφωνα με τον Χαλκίδιο στον *Τίμαιο* του Πλάτωνα, η δεκάδα ονομάστηκε από τους Πυθαγόρειους το πρώτο τετράγωνο, επειδή αυτή αποτελείται από τους πρώτους τέσσερις αριθμούς, 1, 2, 3 και 4.

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι όλοι οι αριθμοί περιστρέφονται στον αριθμό 9 -εξαιτίας αυτού ονομάστηκε από τους Πυθαγόρειους ωκεανός και ορίζοντας- ώστε αυτός είναι

πράγματι παρωνύμιο της μονάδας. Ως εκ τούτου, μπορεί να φανεί περίεργο ότι και η δεκάδα θα πρέπει να θεωρείται ανάλογη προς τη μονάδα. Ο λόγος εντούτοις για αυτό είναι ότι ο πρώτος γόνος της μονάδας είναι ομοίως η μονάδα, η οποία περιέχει πιο εκτεταμένα όλα όσα υφίστανται με μεγαλύτερη συστολή και σαν υπήρχαν εν σπέρματι στην προηγούμενη μονάδα. Επομένως, τόσο η εννεάδα όσο και η δεκάδα είναι μονάδες· αλλά στην πρώτη όλοι οι αριθμοί υπάρχουν πιο συνεκτικά, ενώ στην τελευταία περισσότερο διασκορπισμένα και διαχωρισμένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

Σχετικά με τις ιδιότητες της μονάδας.

Έχοντας λοιπόν αποκαλύψει τη σημασία των περισσότερων ονομάτων που οι Πυθαγόρειοι έδιναν στους αριθμούς μέχρι τη δεκάδα, στη συνέχεια θα παρουσιάσω στον αναγνώστη ορισμένες ιδιότητες αυτών των αριθμών, όπως έχουν ανακαλυφθεί εν μέρει από τους αρχαίους και εν μέρει από μένα. Θα αρχίσω, όπως η τάξη απαιτεί, με τις ιδιότητες της μονάδας.

Έχουμε δείξει λοιπόν, από τον Αριστοτέλη στην πραγματεία του *Περί Πυθαγορείων, ότι* η μονάδα είναι κατ' ουσίαν, δηλαδή αιτιατώς, τόσο περιττή όσο και άρτια· γιατί προστιθέμενη στον περιττό παράγει τον άρτιο αριθμό και αντίστοιχα προστιθέμενη στον άρτιο παράγει τον περιττό αριθμό. Εν συνεχεία, ο Πλούταρχος στα *Πλατωνικά Θέματα,* παρατηρεί ότι η μονάδα είναι ένας τριγωνικός αριθμός (εν δυνάμει)· διότι, εαν οποιοσδήποτε τριγωνικός αριθμός πολλαπλασιαστεί με το 8 και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας τετράγωνος αριθμός. Για παράδειγμα, 3x8 = 24 και 24 + 1 = 25, ένας τετράγωνος αριθμός, 6 x 8=48 και 48+1 =49. Αλλά το ίδιο ισχύει και για τη μονά-

δα, δηλαδή 1 x 8 = 8 και 8 + 1 = 9 ο οποίος είναι τετράγωνος αριθμός.

Είναι επίσης γνωστό στους μαθηματικούς ότι εάν οποιοσδήποτε πενταγωνικές αριθμός πολλαπλασιαστεί με το 24 και στο γινόμενο προστεθεί η μονάδα, το άθροισμα θα είναι ένας τετράγωνος αριθμός. Έτσι, 5 x 24=120 και 120 + 1 = 121, το τετράγωνο του 11. Επίσης, 12x 24 = 288 και 288 + 1 = 289, το τετράγωνο του 17. Το ίδιο ισχύει και σε άλλα παραδείγματα. Το ίδιο επίσης ισχύει και στη μονάδα· διότι 24 x 1 = 24 και 24 + 1 = 25, το τετράγωνο του 5. Ουσιαστικά η μονάδα είναι επίσης, εν δυνάμει ή αιτιατώς, ένας πενταγωνικός αριθμός.

Έχω επίσης ανακαλύψει ότι μπορεί να δειχθεί ότι η μονάδα είναι τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική κ.λπ. πυραμίδα. Έτσι, για παράδειγμα, οι αριθμοί 1, 4, 10, 20, 35, κ.λπ. είναι τριγωνικές πυραμίδες[32]. Οι αριθμοί 1, 5, 14, 30, 55 κ.λπ., είναι τετραγωνικές πυραμίδες. Οι αριθμοί 1, 6, 18, 40, 75, κ.λπ., είναι πενταγωνικές· και οι αριθμοί 1, 7, 22, 50, 95, κ.λπ. είναι οι πρώτες εξαγωνικές πυραμίδες.

$$\text{Αλλά}\quad \left.\begin{array}{rl} 4\text{x}1 \text{ και } +1=5 & \text{ο δεύτερος} \\ 4\text{x}4 \text{ και } +1=17 & \text{ο πέμπτος} \\ 4\text{x}10 \text{ και } +1=41 & \text{ο ενδέκατος} \end{array}\right\}\ \text{εξαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{rl} 5\text{x}1 \text{ και } +1=6 & \text{ο δεύτερος} \\ 5\text{x}5 \text{ και } +1=26 & \text{ο έκτος} \\ 5\text{ x }14 \text{ και } +1=71 & \text{ο δέκατος} \\ & \text{πέμπτος} \end{array}\right\}\ \text{επταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{rl} 7\text{x}1 \text{ και } +1=8 & \text{ο δεύτερος} \\ 7\text{x}6 \text{ και } +1=43 & \text{ο έβδομος} \\ 7\text{ x }18 \text{ και } +1=127 & \text{ο δέκατος} \\ & \text{έβδομος} \end{array}\right\}\ \text{εννεαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

8x1 και +1 = 9 ο δεύτερος
8x7 και +1=57 ο όγδοος
8 χ 22 και +1 = 177 ο εικοστός τρίτος
δεκαγωνικός γνώμων

κ.λπ.

Επιπροσθέτως, οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6, κ.λπ., είναι τριγωνικοί γνώμονες και έχω ανακαλύψει ότι μπορεί να αποδειχθεί ότι η μονάδα είναι εν δυνάμει καθένας από αυτούς. Διότι,

2x1 και +1 = 3
2 X 2 και +1 = 5
2 χ 3 και +1 = 7
2x4 και +1 = 9
2x5 και +1 = 11
γνώμονες τετραγώνων

κ.λπ.

3 x 1 και +1=4
3 x 2 και +1 = 7
3x3 και +1 = 10
3 x 4 και +1 = 13
3x5 και +1 = 16
γνώμονες πενταγώνων

κ.λπ.

4 x 1 και +1 = 5
4 x 2 και +1 = 9
4 x 3 και +1 = 13
4 x 4 και +1 = 17
4 x 5 και +1 = 21
γνώμονες εξαγώνων

κ.λπ.

5 x 1 και +1 = 6
5 x 2 και +1 = 11
5 x 3 και +1 = 16
5 x 4 και +1 = 21
5 x 5 και +1 = 26
γνώμονες επταγώνων

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r} 6 \times 1 \text{ και } +1 = 7 \\ 6 \times 2 \text{ και } +1 = 13 \\ 6 \times 3 \text{ και } +1 = 19 \\ 6 \times 4 \text{ και } +1 = 25 \\ 6 \times 5 \text{ και } +1 = 31 \end{array}\right\} \text{γνώμονες οκταγώνων}$$

κ.λπ.

Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους, κάτι που αποδεικνύει επαρκέστατα ότι η μονάδα είναι αιτιατώς κάθε αριθμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIV

Σχετικά με τις ιδιότητες της δυάδας και της τριάδας.

Η δυάδα, όπως θαυμάσια παρατηρεί ο Πρόκλος *στα Σχόλια τον* πάνω στον Ευκλείδη, είναι ο μέσος ανάμεσα στη μονάδα και τον αριθμό. Διότι η μονάδα, λέει, παράγει περισσότερο με πρόσθεση παρά με πολλαπλασιασμό˙ αντίθετα, ο αριθμός αυξάνεται περισσότερο με πολλαπλασιασμό παρά με πρόσθεση· και η δυάδα, είτε πολλαπλασιαστεί είτε προστεθεί με τον εαυτό της, παράγει ίση ποσότητα. Έτσι, ορισμένοι από τους αρχαίους θεωρούν ότι το όνομα της προέρχεται από το *δύναι,* επειδή ο αριθμός αρχίζει από εκεί να εισχωρεί στο πλήθος. Για αυτό, επίσης, ονομάστηκε Ρέα, η οποία υποδηλώνει κάποια ροή, διότι από εκεί απορρέουν τα ρεύματα, δηλαδή οι πρόοδοι του πλήθους. Επιπλέον, η δυάδα, όπως παρατηρεί ο Μαρτιάνους Κάπελλα, είναι η μητέρα των στοιχείων διότι το 4 είναι ο γόνος του 2. Είναι επίσης η πρώτη μορφή του άρτιου αριθμού. Ομοίως, η εβδομάδα 64, που είναι και τετράγωνο και κύβος, παράγεται από ένα συνεχή πολλαπλασιασμό με το 2 αρχίζοντας από τη μονάδα, όπως θα δείξουμε όταν θα συζητήσουμε τις ιδιότητες του αριθμού 7. Και όπως ο θέων ο Σμυρναίος παρατηρεί[33], η ύλη, κάθε αισθητή φύση, η γένεση, η κίνηση, η αύξηση, η σύνθε-

ση, η σύνδεση και σχέση, υφίστανται σύμφωνα προς τη δυάδα. Τέλος, όπως είναι φανερό από το προηγούμενο κεφάλαιο, εαν το 2 πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε τριγωνικό γνώμονα και στο γινόμενο προστεθεί η μονάδα, το άθροισμα θα είναι πάντοτε ο γνώμονας ενός τετραγώνου.

Από την ένωση της δυάδας με τη μονάδα γεννάται η τριάδα, η οποία, λέει ο Θέων ο Σμυρναίος, είναι ο πρώτος αριθμός που έχει αρχή, μέση και τέλος. Και *προσθέτει:* «Συνεπώς είναι ο πρώτος αριθμός για τον οποίο διατυπώθηκε η λέξη *όλον.* Διότι δε χρησιμοποιούμε τη λέξη *όλον* για αριθμούς μικρότερους του τρία, αλλά λέμε το ένα και τα δύο. Επίσης, με τον αριθμό αυτό δημιουργούμε συμφωνίες, δηλώνοντας με αυτό ότι αιτούμεθα κάθε καλό. Ομοίως, αποκαλούμε εκείνους που είναι από κάθε άποψη αξιοθρήνητοι, τρισάθλιους, και εκείνους που είναι από κάθε άποψη ευλογημένοι, τρισευλογημένους. Η πρώτη αρχή της επιφάνειας προέρχεται από αυτόν τον αριθμό. Διότι η πρώτη υπόσταση αυτής είναι το τρίγωνο· και εξαιτίας αυτού υπάρχουν τρία είδη τριγώνου, το ισόπλευρο, το ισοσκελές και το σκαληνά. Ομοίως υπάρχουν τρία είδη γωνιών, η ορθή, η οξεία και η αμβλεία. Η ορθή γωνία ορίζεται από τη φύση της μονάδας και αποτελείται από το ίσο και το όμοιο. Για τούτο, όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, όντας τα μέσα ανάμεσα στην οξεία και την αμβλεία, στο υπερβάλλον και το υπερβαλλόμενο. Αλλά οι άλλες γωνίες είναι άπειρες και αόριστες· διότι απαρτίζονται από την υπερβολή και την έλλειψη. Επίσης, η τριάδα, όταν προστίθεται με τη μονάδα και τη δυάδα, παράγει το 6, που είναι ο πρώτος τέλειος αριθμός, όντας ίσο προς τα μέρη του. Και αυτός ο τέλειος αριθμός, όταν προστεθεί στο πρώτο τετράγωνο, που είναι το 4, παράγει τη δεκάδα».

Σύμφωνα πάντα με τους Πυθαγόρειους, όπως προηγουμένως παρατηρήσαμε[34], κάθε μεταβίβαση θείων και θνητών υποθέσεων επιτελείται μέσω» εκπομπής και υποδοχής και εδραιώνεται μέσω της αποκατάστασης. Κατά κάποιον τρόπο τα αιθερικά σώματα διασπείρονται, οι επίγειες φύσεις μπο-

ρούμε να πούμε ότι λαμβάνουν (τις αιθερικές εκροές)· και η αποκατάσταση[35] επιτελείται μέσω των ενδιάμεσων φύσεων.

Σε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς, είτε ο ένας από τους δύο, είτε το άθροισμα τους, είτε η διαφορά τους, διαιρείται με το 3. Για παράδειγμα, από τους δύο αριθμούς 6 και 5, το 6 διαιρείται με το 3· των 11 και 5 η διαφορά 6 διαιρείται με το 3· και των 7 και 5 το άθροισμα 12 διαιρείται με το 3. Το τετράγωνο του 3 επίσης, το 9, έχει την εξής ιδιότητα, ότι το 4, το τετράγωνο του 2, είναι το άθροισμα των διαιρετών του, 1 και 3.

Επιπλέον, αν οποιοσδήποτε τριγωνικός γνώμονας πολλαπλασιαστεί με το 3 και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ο γνώμονας ενός πενταγώνου, όπως γίνεται φανερό από όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο XIII. Τέλος, αν οποιοσδήποτε γνώμονας τετραγώνου, δηλαδή αν οποιοσδήποτε από τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, 9 κ.λπ. πολλαπλασιαστεί με το 3 και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας πενταγωνικός γνώμονας, όπως δείξαμε προηγουμένως στο κεφάλαιο για τους πολυγωνικούς αριθμούς. Για παράδειγμα:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \times 1 \text{ και } +1 = 4 \text{ ο δεύτερος} \\ 3 \times 3 \text{ και } +1 = 10 \text{ ο τέταρτος} \\ 3 \times 5 \text{ και } +1 = 16 \text{ ο έκτος} \\ 3 \times 7 \text{ και } +1 = 22 \text{ ο όγδοος} \end{array}\right\} \text{πενταγωνικός γνώμων}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV

Σχετικά με τις ιδιότητες της τετράδας της πεντάδας και της εξάδας.

Εφόσον έχουμε ήδη αναφέρει πάρα πολλά για την τετράδα στο κεφάλαιο σχετικά με τις ονομασίες της, θα προσθέσουμε εδώ λίγες μόνο παρατηρήσεις των αρχαίων. Ο Θέων, στο απόσπασμα που έχουμε παραθέσει από αυτόν σχετικά με την τετρακτύν, έχει σχεδόν εξαντλήσει το θέμα. Θα προ-

σθέσω μόνο ότι το τετράγωνο του αριθμού αυτού κατέχει διάστημα ίσο με το μήκος των πλευρών του[36]. Διότι οι πλευρές είναι συνολικά 4, που η καθεμία είναι 4, και το τετράγωνο αυτού είναι 16. Η τετράδα όμως παράγεται και από την πρόσθεση του 2 με τον εαυτό του και από τον πολλαπλασιασμό του 2 με τον εαυτό του, και για αυτό το λόγο, καθώς πληροφορούμαστε από τον Καμεράριους, και όπως προηγουμένως παρατηρήσαμε, ονομάστηκε από τους Πυθαγόρειους δικαιοσύνη· η ουσία της δικαιοσύνης έγκειται στην ισότητα. Έχω επίσης ανακαλύψει ότι αν το 4 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε της ακολουθίας των τετράγωνων 1, 4, 9, 25, κ.λπ. και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας εξαγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 4 \times 1 \text{ και } +1 = 5 \text{ ο δεύτερος} \\ 4 \times 4 \text{ και } +1 = 17 \text{ ο πέμπτος} \\ 4 \times 9 \text{ και } +1 = 37 \text{ ο δέκατος} \end{array}\right\} \text{εξαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Παρατήρησα επίσης ότι αν το 4 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε γνώμονα τετραγώνου και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας εξαγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 4 \times 1 \text{ και } +1 = 5 \text{ ο δεύτερος} \\ 4 \times 3 \text{ και } +1 = 13 \text{ ο τέταρτος} \\ 4 \times 5 \text{ και } +1 = 21 \text{ ο έκτος} \end{array}\right\} \text{εξαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Και πάλι, εάν το 4 πολλαπλασιάσει οποιοδήποτε πεντάγωνο και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα ομοίως θα είναι ένας εξαγωνικός γνώμων. Έτσι,

$$\left.\begin{array}{l} 4 \times 1 \text{ και } +1 = 5 \text{ ο δεύτερος} \\ 4 \times 5 \text{ και } +1 = 21 \text{ ο έκτος} \\ 4 \times 12 \text{ και } +1 = 49 \text{ ο δέκατος τρίτος} \\ 4 \times 22 \text{ και } +1 = 89 \text{ ο εικοστός τρίτος} \end{array}\right\} \text{εξαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Επιπλέον, αν το 4 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε γνώμονα πενταγώνου και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας εξαγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 5 \text{ ο δεύτερος} \\ 4 \text{ x } 4 \text{ και } +1 = 17 \text{ ο πέμπτος} \\ 4 \text{ x } 7 \text{ και } +1 = 29 \text{ ο όγδοος} \\ 4 \text{ x } 10 \text{ και } +1 = 41 \text{ ο ενδέκατος} \end{array}\right\} \text{εξαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Επίσης αν το 4 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε τριγωνικό αριθμό και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας εξαγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 5 \text{ ο δεύτερος} \\ 4 \text{ x } 3 \text{ και } +1 = 13 \text{ ο τέταρτος} \\ 4 \text{ x } 6 \text{ και } +1 = 25 \text{ ο έβδομος} \\ 4 \text{ x } 10 \text{ και } +1 = 41 \text{ ο ενδέκατος} \end{array}\right\} \text{εξαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Τέλος, αν το 4 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε από τους αριθμούς σε μια φυσική ακολουθία 1, 2, 3, 4, 5, κ.λπ., και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα ομοίως θα είναι ένας εξαγωνικός γνώμων, όπως γίνεται φανερό από όσα αναφέρθησαν στο τέλος του κεφαλαίου XIII.

Η πεντάδα, κατά πρώτον, καθώς ο Μαρτιάνους Κάπελλα παρατηρεί, είτε συνδυαστεί με άλλους περιττούς αριθμούς, είτε με εκείνους του είδους της, πάντοτε εμφανίζεται η ίδια. Έτσι, 5 x 5 = 25, 3 x 5 = 15, 7 x 5 = 35, 9 x 5 = 45· σε όλα αυτά τα γινόμενα το τελευταίο ψηφίο είναι το 5. Και προσθέτει: «Υπάρχουν πέντε ζώνες της γης. Στον άνθρωπο επίσης υπάρχουν πέντε αισθήσεις. Και πέντε είδη κατοικούν στη γη, δηλαδή άνθρωποι, τετράποδα, ερπετά, πτηνά και υδρόβια ζώα». Επίσης, υπάρχουν πέντε καθοδικά φαινόμενα (κατάφοροι), δηλαδή χιόνι, υγρασία, χαλάζι, βροχή και πάχνη, και άλλα τόσα ανοδικά (αναφοραί) από τη γη και το νερό, δηλαδή ατμός, καπνός, σύννεφα, ομίχλες και ο άνεμος που ονομάζεται τυφώνας ή ανεμοστρόβιλος.

Με βάση όσα ανέφερα στο κεφάλαιο XIII, είναι φανερό ότι αν το 5 πολλαπλασιαστεί με οποιαδήποτε τετραγωνική πυραμίδα, και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας επταγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 1 \text{ και } +1 = 6 \text{ ο δεύτερος} \\ 5 \times 5 \text{ και } +1 = 26 \text{ ο έκτος} \\ 5 \times 14 \text{ και } +1 = 71 \text{ ο δέκατος πέμπτος} \end{array}\right\} \text{επταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Επίσης, αν το 5 πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε τριγωνικό γνώμονα, και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας επταγωνικός γνώμονας. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 1 \text{ και } +1 = 5 \text{ ο δεύτερος} \\ 5 \times 2 \text{ και } +1 = 11 \text{ ο τρίτος} \\ 5 \times 3 \text{ και } +1 = 16 \text{ ο τέταρτος} \\ 5 \times 4 \text{ και } +1 = 21 \text{ ο πέμπτος} \\ 5 \times 5 \text{ και } +1 = 26 \text{ ο έκτος} \end{array}\right\} \text{επταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Επιπλέον, διαπίστωσα ότι αν το 5 πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε εξαγωνικό γνώμονα και στο γινόμενο προστεθεί η μονάδα, το άθροισμα επίσης θα είναι ένας επταγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 1 \text{ και } +1 = 6 \text{ ο δεύτερος} \\ 5 \times 5 \text{ και } +1 = 26 \text{ ο έκτος} \\ 5 \times 9 \text{ και } +1 = 46 \text{ ο δέκατος} \\ 5 \times 13 \text{ και } +1 = 66 \text{ ο δέκατος τέταρτος} \end{array}\right\} \text{επταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Ομοίως, εαν το 5 πολλαπλασιαστεί με οποιοδήποτε εξάγωνο και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι πάλι ένας επταγωνικός γνώμων. Έτσι,

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 1 \text{ και } +1 = 6 \text{ ο δεύτερος} \\ 5 \times 6 \text{ και } +1 = 31 \text{ ο έβδομος} \\ 5 \times 15 \text{ και } +1 = 76 \text{ ο δέκατος έκτος} \end{array}\right\} \text{επταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Επιπροσθέτως, αν το 5 πολλαπλασιαστεί με οποιοδήποτε από τα τετράγωνα 1, 4, 9, 16, κ.λπ. και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι επίσης ένας επταγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 1 \text{ και } +1 = 6 \text{ ο δεύτεροι} \\ 5 \times 4 \text{ και } +1 = 21 \text{ ο πέμπτος} \\ 5 \times 9 \text{ και } +1 = 46 \text{ ο δέκατος} \end{array}\right\} \text{επταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Τέλος, αν το 5 πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε γνώμονα τετραγώνου και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας επταγωνικός γνώμων. Διότι,

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 1 \text{ και } +1 = 6 \text{ ο δεύτερος} \\ 5 \times 3 \text{ και } +1 = 16 \text{ ο τέταρτος} \\ 5 \times 5 \text{ και } +1 = 26 \text{ ο έκτος} \end{array}\right\} \text{επταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Όσον αφορά την εξάδα, είναι ο πρώτος τέλειος αριθμός εν ενεργεία, όντας ίση προς το άθροισμα των μερών της. Κατά κάποιον τρόπο αυτή συμπεριλαμβάνει το 3, το οποίο προηγείται αυτής και είναι επίσης αξιομνημόνευτο για την τελειότητά του. Διότι $2+2+2=6$. Ομοίως, το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών αριθμών, που υπερβαίνει ο ένας τον άλλο κατά τη μονάδα, μπορεί να διαιρεθεί με 3 ή 6. Επίσης, το εμβαδόν του πρώτου ορθογώνιου τριγώνου που οι πλευρές του είναι σύμμετρες είναι 6, όπως θα δειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο για την εβδομάδα. Διότι οι πλευρές αυτού του τριγώνου είναι 3, 4 και 5· με αυτούς τους αριθμούς οι Πυθαγόρειοι αποδεικνύουν, μεταξύ άλλων, ότι τα έμβρυα των εννέα και των επτά μηνών επιζούν, όχι όμως εκείνα των οκτώ μηνών. Αν το 4 πολλαπλασιαστεί με το 5, το γινόμενο είναι 20. Επίσης, το πέντε πολλαπλασιαζόμενο με τον εαυτό του παράγει 25. Το άθροισμα αυτών των δυο αριθμών είναι 45, το οποίο, πολλαπλασιαζόμενο επί το εμβαδόν 6, παράγει 270. Αυτός ο αριθμός, αν θεωρηθεί ότι εκφράζει μέρες και μετατραπεί σε μήνες διαιρώντας με το 30, θα δώσει 9 μήνες. Ομοίως, αν το 5 πολλαπλασιαστεί με το 4, το γινόμενο είναι

20 και το γινόμενο του 5 επί 3 είναι 15. Το άθροισμα αυτών των δυο είναι 35, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί 6, τον αριθμό του τριγωνικού εμβαδού, παράγει 210. Αν ο αριθμός αυτός θεωρηθεί ότι εκφράζει ημέρες και διαιρεθεί με το 30, θα τραπεί σε 7 μήνες[37]. Επιπλέον, αν το 5 πολλαπλασιαστεί με το 3, το γινόμενο είναι 15· και το 5 πολλαπλασιαζόμενο με τον εαυτό του είναι 25. Το άθροισμα αυτών των δύο είναι 40, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το 6 δίνει 240. Αλλά αυτό διαιρούμενο με το 30, ανάγεται στους 8 μήνες, εάν ο αριθμός 240 θεωρηθεί ότι εκφράζει ημέρες. Τα έμβρυα όμως των 8 μηνών δεν επιζούν, επειδή το 8 αποτελείται από τους δυο περιττούς αριθμούς 5 και 3, οι οποίοι έχουν αρσενική ιδιότητα[38]. Όμως, το αρσενικό από μόνο του, ή το θηλυκό από μόνο του, είναι ανίκανο να γεννήσει. Ενώ στους αριθμούς 9 και 7, ο περιττός και ο άρτιος αναμιγνύονται, δηλαδή το αρσενικό και το θηλυκό. Διότι $5+4=9$ και $4+3=7$[39].

Ομοίως, η εξάδα είναι κάποια πηγή ή ρίζα αριθμητικής αναλογίας. Διότι οι ελάχιστοι αριθμοί από τους οποίους αποτελείται η αριθμητική αναλογία είναι 1, 2, 3 και το άθροισμα τους είναι 6.

Η εξάδα επίσης, κατά τον ίδιο τρόπο όπως η πεντάδα, πάντοτε επανασυνιστάται όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό της, αλλά, αντίθετα προς την πεντάδα, αυτή δεν έχει πάντοτε τον ίδιο αριθμό να προηγείται. Σε όλους δηλαδή τους πολλαπλασιασμούς του 5 με τον εαυτό του, το 2 πάντοτε προηγείται του τελευταίου αριθμού. Για παράδειγμα, αν υψωθεί το 5 έως την 5η δύναμη, παράγει την ακολουθία 5, 25, 125, 625, 3125, και το ίδιο επ' άπειρον. Αλλά το 6 όταν υψώνεται σε κάποια δύναμη, πάντοτε έχει είτε 1, ή 3, ή 5, ή 7, ή 9, δηλαδή έχει πάντα έναν από τους περιττούς αριθμούς της δεκάδας να προηγείται του τελευταίου όρου, όπως είναι φανερό στην επόμενη ακολουθία 6, 36, 216, 1296, 7776, 46656.

Κατά τους Πυθαγόρειους, μετά από 216 έτη, που είναι ο κύβος του 6, υφίσταται μια αναγέννηση των πραγμάτων και αυτός είναι ο περιοδικός χρόνος της μετεμψύχωσης.

Στην εξάδα, όπως παρατηρεί ο Θέων ο Σμυρναίος, πρωτοσυνίσταται ο αρμονικός μέσος. Διότι αν πάρουμε τον επίτριτο αυτού, δηλαδή το 8, και το διπλάσιο αυτού, το 12, οι αριθμοί 6, 8, και 12 θα είναι σε αρμονική αναλογία˙ γιατί όπως είναι το 6 προς το 12, έτσι είναι και η διαφορά μεταξύ 8 και 6 προς τη διαφορά μεταξύ 8 και 12, δηλαδή το 2 προς το 4. Εαν, ομοίως, πάρουμε τον ημιόλιο του 6, δηλαδή το 9, και το διπλάσιο αυτού, το 12, οι αριθμοί 6, 9 και 12 θα βρίσκονται σε αριθμητική αναλογία. Και αν λάβουμε το μισό αυτού, και κατόπιν το διπλάσιο, οι αριθμοί 3, 6, και 12 θα βρίσκονται σε γεωμετρική αναλογία. Ομοίως, οι ίδιοι τέσσερις αριθμοί, 6, 8, 9, και 12, βρίσκονται σε γεωμετρική αναλογία˙ διότι 6x12=72=8x9. Η εξάδα επίσης, λέει ο Μαρτιάνους Κάπελα, είναι ο αριθμός που παράγει αρμονίες. Διότι 6 προς 12 είναι η δια πασών συμφωνία˙ 6 προς 9 είναι η συμφωνία δια πέντε˙ και 6 προς 8 είναι η συμφωνία δια τεσσάρων. Και προσθέτει: «Η εξάδα, επίσης, συνδυαζόμενη με την τετράγωνη και στερεά τετράδα, δηλαδή με το 4, μετρά τις ώρες της ημέρας και της νύκτας˙ διότι 6 χ 4=24».

Επιπλέον, βάσει όσων έχω δείξει στο κεφάλαιο XIII, είναι φανερό ότι εαν το 6 πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε τριγωνικό γνώμονα και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας οκταγωνικός γνώμων. Έχω επίσης ανακαλύψει ότι αν το 6 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε επταγωνικό γνώμονα και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι πάλι οκταγωνικός γνώμων. Δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{l} 6 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 7 \text{ ο δεύτερος} \\ 6 \text{ x } 6 \text{ και } +1 = 37 \text{ ο έβδομος} \\ 6 \text{ x } 11 \text{ και } +1 = 67 \text{ ο δωδέκατος} \\ 6 \text{ x } 16 \text{ και } +1 = 97 \text{ ο δέκατος έβδομος} \end{array}\right\} \text{οκταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Αν η ίδια διαδικασία ακολουθηθεί με τα τετράγωνα 1. 4, 9, 16, κ.λπ., με τους γνώμονες των τετραγώνων 1, 3, 5, 7 κ.λπ. και με τα επτάγωνα 1, 7, 18, κ.λπ., θα παραχθούν οκταγωνικοί γνώμονες. Δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{r} 6 \times 1 \text{ και } +1 = 7 \text{ ο δεύτερος} \\ 6 \times 4 \text{ και } +1 = 25 \text{ ο πέμπτος} \\ 6 \times 9 \text{ και } +1 = 55 \text{ ο δέκατος} \end{array}\right\} \text{οκταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r} 6 \times 1 \text{ και } +1 = 7 \text{ ο δεύτερος} \\ 6 \times 3 \text{ και } +1 = 19 \text{ ο τέταρτος} \\ 6 \times 5 \text{ και } +1 = 31 \text{ ο έκτος} \end{array}\right\} \text{οκταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r} 6 \times 1 \text{ και } +1 = 7 \text{ ο δεύτερος} \\ 6 \times 7 \text{ και } +1 = 43 \text{ ο όγδοος} \\ 6 \times 18 \text{ και } +1 = 109 \text{ ο δέκατος ένατος} \end{array}\right\} \text{οκταγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVI

Σχετικά με τις ιδιότητες της εβδομάδας.

Η εβδομάδα κατέχει πολλές αξιοθαύμαστες ιδιότητες και είναι σεβάσμια, όπως υπαινίσσεται το όνομα της. Για τις ιδιότητες αυτές πολλά μας έχουν μεταφερθεί από τους αρχαίους, αλλά κανείς δεν τις έχει πραγματευθεί τόσο διεξοδικά, όσο ο Φίλων ο Ιουδαίος, ο οποίος στην πραγματεία του *Περί Δημιουργίας του Κόσμου,* έχει γράψει το ακόλουθο εγκώμιο σχετικά με αυτόν τον αριθμό:

«Δε γνωρίζω εάν μπορεί κάποιος να δοξάσει επαρκώς τη φύση της εβδομάδος, η οποία είναι υπερβολικά έξοχη για να περιγραφεί με τη δύναμη των λέξεων. Εντούτοις, δεν είναι πρέπον να είμαστε σιωπηλοί, παρόλο που ό,τι έχει ειπωθεί για αυτήν είναι της πλέον υπέροχης φύσης· αλλά θα πρέπει να προσπαθήσουμε, αν δεν μπορούμε να αναφέρουμε όλες και τις πλέον θεμελιώδεις αρετές της, τουλάχιστον να καταστήσουμε φανερές όσες από τις ιδιότητές της είναι προσιτές στην έλλογη δύναμη μας. Η εβδομάδα λοιπόν υφίσταται κα-

τά δύο έννοιες· η μία υπάρχει πράγματι μέσα στη δεκάδα, αυτή που μετράται επτά φορές από τη μονάδα και αποτελείται από επτά μονάδες. Η άλλη υφίσταται έξω από τη δεκάδα και της οποίας η βασική αρχή είναι εξ ολοκλήρου η μονάδα, σύμφωνα προς διπλάσιους, ή τριπλάσιους, ή εν γένει ανάλογους αριθμούς. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 64 και 729· ο πρώτος αυξάνεται με συνεχή διπλασιασμό από τη μονάδα, ενώ ο δεύτερος με συνεχή τριπλασιασμό. Ωστόσο, το κάθε είδος δε θα έπρεπε να εξεταστεί με αμέλεια. Πράγματι, το δεύτερο είδος έχει ένα έκδηλο προνόμιο. Διότι η εβδομάδα που συντίθεται από διπλάσιους, ή τριπλάσιους, ή ανάλογους αριθμούς από τη μονάδα, είναι και κύβος και τετράγωνο, συμπεριλαμβάνοντας ως εκ τούτου και τα δυο είδη, της ασώματης και της σωματικής ουσίας. Το μεν είδος της ασώματης ουσίας σύμφωνα προς την επιφάνεια που σχηματίζεται από τετράγωνα· της δε σωματικής σύμφωνα προς την άλλη διάσταση (ύφος) που σχηματίζεται από κύβους. Αλλά η αξιοπιστία των όσων λέγονται καθίσταται περισσότερο έκδηλη στους προαναφερθέντες αριθμούς. Η εβδομάδα 64, η οποία αυξάνεται από τη μονάδα με λόγο δύο προς ένα, είναι τετράγωνο που παράγεται από τον πολλαπλασιασμό του 8 με το 8, αλλά και κύβος, που η πλευρά ή ρίζα αυτού είναι 4. Η εβδομάδα που αυξάνεται έχοντας λόγο τρία προς ένα αρχίζοντας από τη μονάδα, δηλαδή το 729, είναι πράγματι τετράγωνο, σχηματιζόμενο από τον πολλαπλασιασμό του 27 με τον εαυτό του και επίσης κύβος, που η πλευρά του είναι 9[40]. Θέτοντας πάντοτε ως αρχή μια εβδομάδα, στη θέση δηλαδή της μονάδας, και αυξάνοντας τη σύμφωνα προς τον ίδια λόγο μέχρι την εβδομάδα, πάντοτε θα ανακαλύπτετε ότι οι αυξηθέντες αριθμοί είναι ταυτόχρονα τετράγωνα και κύβοι. Η εβδομάδα λοιπόν που συντίθεται βάσει του λόγου δύο προς ένα, αρχίζοντας από το 64, θα είναι 4096[41], το οποίο είναι και τετράγωνο και κύβος· ένα τετράγωνο που έχει για πλευρά του το 64 και κύβος που η πλευρά του είναι 16.

Ας περάσουμε τώρα στο άλλο είδος της εβδομάδας, που συμπεριλαμβάνεται στη δεκάδα, το οποίο είναι εξίσου αξιοθαύμαστο με το πρώτο είδος. Αυτή λοιπόν η εβδομάδα συ-

ντίθεται από το ένα, το δύο και το τέσσερα, τα οποία κατέχουν δυο αρμονικότατους λόγους, το λόγο του δύο προς ένα και αυτόν του τέσσερα προς ένα˙ ο πρώτος σχηματίζει τη συμφωνία δια πασών και ο δεύτερος τη δις δια πασών. Επίσης, αυτή η εβδομάδα συμπεριλαμβάνει άλλες διαιρέσεις, αποτελούμενη κατά κάποιον τρόπον από κάποιες συζεύξεις. Κατανέμεται δηλαδή κατ' αρχήν σε μονάδα και εξάδα, κατόπιν σε δυάδα και πεντάδα, τέλος σε τριάδα και τετράδα. Αλλά αυτή η αναλογία των αριθμών είναι επίσης η πλέον μουσική. Διότι ο λόγος του 6 προς το 1 παράγει το μεγαλύτερο διάστημα ανάμεσα στους τόνους, με το οποίο ο οξύτερος απέχει από τον πιο επίπεδο ήχο, όπως θα αποδείξουμε όταν θα μεταβούμε από τους αριθμούς στις αρμονίες. Ο λόγος του 5 προς το 2 παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δύναμη σε αρμονία, κατέχοντας σχεδόν μια δύναμη ίση με αυτή της δια πασών, όπως παρουσιάζεται με τη μέγιστη σαφήνεια στον αρμονικό κανόνα[42]. Ο λόγος του 4 προς το 3 σχηματίζει την πρώτη αρμονία, την επίτριτη, που είναι η δια τεσσάρων συμφωνία.

Ομοίως, μια άλλη ομορφιά αυτής της εβδομάδας παρουσιάζεται, η οποία πρέπει να θεωρηθεί ως ιερότατη. Διότι, εφόσον αυτή αποτελείται από την τριάδα και την τετράδα, παρουσιάζει εκείνο που είναι αδιάσπαστο και εκ φύσεως σε ευθεία γραμμή στα πράγματα. Πρέπει να δειχθεί με ποιον τρόπο αυτό επιτελείται. Το ορθογώνιο τρίγωνο, που είναι η αρχή των ποιοτήτων, αποτελείται από τους αριθμούς 3, 4 και 5[43]. Αλλά το 3 και το 4, που είναι η ουσία αυτής της εβδομάδας, σχηματίζουν την ορθή γωνία. Διότι η αμβλεία και η οξεία εκθέτουν το ανώμαλο, το ακανόνιστο και το άνισο, εφόσον αυτές επιδέχονται το περισσότερο και το λιγότερο. Αλλά η ορθή γωνία δεν επιδέχεται σύγκριση, ούτε είναι μια ορθή γωνία περισσότερο ορθή από μια άλλη, αλλά αυτή παραμένει το ίδιο και ποτέ δε μεταβάλλει την πρέπουσα φύση της. Εφόσον όμως το ορθογώνιο τρίγωνο είναι η αρχή των σχημάτων και ποιοτήτων και η ουσία της εβδομάδας είναι το 3 και το 4, που κατ' ανάγκη σχηματίζουν ορθή γωνία, τότε η εβδομάδα μπορεί δίκαια να θεωρηθεί πηγή κάθε σχήματος και κάθε ποιότητας. Επιπροσθέτως, μπορεί ορθά να ειπωθεί

ότι το 3 είναι ο αριθμός του επίπεδου σχήματος, εφόσον το σημείο διευθετείται σύμφωνα προς τη μονάδα, η γραμμή σύμφωνα προς τη δυάδα και η επιφάνεια σύμφωνα προς την τριάδα. Αλλά το 4 είναι ο αριθμός του στερεού, καθώς η πρόσθεση της μονάδας προσδίδει ύψος στις επιφάνειες. Άρα, είναι προφανές ότι η ουσία της εβδομάδας είναι η αρχή της γεωμετρίας και στερεομετρίας· και εν συντομία, είναι η αρχή των ασώματων και των σωματικών φύσεων.

Στην εβδομάδα εμπεριέχονται εκ φύσεως τόσα πολλά από εκείνα που αρμόζουν στα ιερά ενδιαφέροντα, ώστε αυτή υπερέχει σε σχέση με όλους τους αριθμούς που βρίσκονται στη δεκάδα. Διότι από αυτούς κάποιοι γεννούν, ενώ οι ίδιοι δεν είναι γεννημένοι· άλλοι είναι πραγματικά γεννημένοι, αλλά δε γεννούν· άλλοι και γεννούν και είναι γεννημένοι. Μόνο η εβδομάδα δεν ανήκει σε καμία από αυτές τις ομάδες, γεγονός που μπορεί να επιβεβαιωθεί με την ακόλουθη απόδειξη: η μονάδα παράγει όλους τους αριθμούς που έπονται αυτής, αλλά με κανένα τρόπο δεν παράγεται η ίδια από κάποιον αριθμό. Το οκτώ παράγεται πραγματικά από δύο φορές το τέσσερα, αλλά δεν παράγει κανέναν αριθμό της δεκάδας. Το 4 κατατάσσεται ανάμεσα σε εκείνες τις φύσεις που και παράγουν και είναι παραγόμενες. Διότι αυτό γεννά το 8, όταν πολλαπλασιαστεί με το 2, γεννιέται δε από δύο φορές το δύο. Μόνο το 7, όπως έχω πει, δεν είναι κατάλληλο, από τη φύση, ούτε να παράγει ούτε να παράγεται. Για τούτο ορισμένοι φιλόσοφοι πραγματικά εξομοιώνουν τον αριθμό αυτό με τη Νίκη, που είναι αμήτωρ και παρθένος και που λέγεται ότι αναδύθηκε στο φως από το κεφάλι του Αία. Οι Πυθαγόρειοι όμως την εξομοιώνουν με τον ηγέτη και κυβερνήτη όλων των πραγμάτων. Επειδή αυτό που ούτε παράγει ούτε παράγεται, παραμένει αμετακίνητο· διότι η γένεση υφίσταται στην κίνηση, εφόσον το γεγενημένο δεν είναι χωρίς κίνηση. Εκείνο δηλαδή που γεννά, βρίσκεται σε κίνηση, έτσι ώστε να μπορεί να γεννά, το ίδιο και εκείνο που γεννιέται, έτσι ώστε να μπορεί να γεννιέται. Μόνο η αρχαιότατη αρχή και ο ηγέτης των πραγμάτων, του οποίου σωστά μπορεί να ειπωθεί ότι η εβδομάδα είναι εικόνα, ούτε κινεί, ούτε κι-

νείται. Ο Φιλόλαος επιβεβαιώνει το αληθές των λόγων μου με τα ακόλουθα λόγια: «Ο Θεός», λέει, «είναι ο ηγέτης και κυβερνήτης όλων των πραγμάτων, όντας πάντοτε ένας, σταθερός, ακίνητος, ο ίδιος όμοιος προς τον εαυτόν του, διαφορετικός από τα άλλα πράγματα». Στα νοητά, λοιπόν, η εβδομάδα επιδεικνύει το ακίνητον και αδιατάρακτο, ενώ στα αισθητά εκδηλώνει μια ισχυρή και ιδιαίτερη συνδετική δύναμη, μέσω της οποίας και μέσω των περιόδων της σελήνης όλα τα επίγεια πράγματα καθίστανται εκ φύσεως κατάλληλα να ευεργετηθούν. Ο τρόπος όμως με τον οποίο επιτελείται αυτό, πρέπει να εξετασθεί.

Ο αριθμός 7, όταν προστεθεί στη μονάδα και τους αριθμούς που την ακολουθούν, παράγει το 28, έναν τέλειο αριθμό, ίσο προς τα μέρη του[44]. Αλλά ο κατά τέτοιον τρόπο παραγόμενος αριθμός είναι αποκαταστατικός της σελήνης, δηλαδή έχει τη δύναμη να την επαναφέρει στην αρχική θέση της, κατά το χρόνο που η σελήνη αρχίζει να λαμβάνει μια αισθητή αύξηση του σχήματος της και στο οποίο επιστρέφει με ελάττωση. Πραγματικά, αυτή αυξάνεται από την πρώτη σεληνιακή έκλαμψη μέχρις ότου φθάσει στο μισό σε διάρκεια επτά ημερών. Κατόπιν, στον ίδιο αριθμό ημερών αυτή γίνεται πλήρης σφαίρα. Και πάλι, σαν να επιστρέφει από το τέλος μέσω του ίδιου μονοπατιού, από πλήρης σφαίρα γίνεται εκ νέου μισή σε επτά ημέρες· και από εκεί, στον ίδιο αριθμό ημερών, αποκτά την πρώτη μορφή της ολοκληρώνοντας έτσι τον αριθμό 28.

Η εβδομάδα σωστά αποκαλείται από εκείνους που χρησιμοποιούν ονόματα *τελεσφόρος* ή τελειοποιός, επειδή όλα τα πράγματα αποκτούν τελειότητα μέσω αυτού του αριθμού. Τούτο αποδεικνύεται από το γεγονός ότι κάθε οργανικό σώμα έχει τρία διαστήματα ή διαστάσεις, δηλαδή μήκος, πλάτος και ύψος, καθώς και τέσσερα όρια, δηλαδή σημείο, γραμμή, επιφάνεια και στερεό, από τη σύνθεση των οποίων σχηματίζεται η εβδομάδα. Θα ήταν όμως αδύνατο τα σώματα να έχουν ως μέτρο την εβδομάδα, σύμφωνα προς τη σύνθεση των τριών διαστάσεων και των τεσσάρων ορίων, εκτός αν οι ιδέες των πρώτων αριθμών, δηλαδή του ένα, δύο, τρία

και τέσσερα, στους οποίους βασίζεται η δεκάδα, συμπεριλάμβαναν τη φύση της εβδομάδας. Διότι αυτοί οι αριθμοί έχουν όντως τέσσερα όρια, το πρώτο, το δεύτερο, το τρίτο και το τέταρτο· αλλά και τρία διαστήματα: το πρώτο διάστημα είναι από το 1 έως το 2, το δεύτερο από το 2 έως το 3 και το τρίτο από το 3 έως το 4. Επίσης, ανεξάρτητα από αυτά τα πράγματα, οι ηλικίες από τη νηπιακή ως τη γεροντική παρουσιάζουν σαφέστατα την τελειοποιό δύναμη της εβδομάδας, εφόσον μετρώνται από αυτήν. Στην πρώτη επταετία (έως 7 χρόνων) φυτρώνουν τα δόντια. Στη δεύτερη (δηλαδή σε ηλικία 14 χρόνων) είναι ο χρόνος που υπάρχει η ικανότητα παραγωγής αναπαραγωγικού σπέρματος. Στην τρίτη (21 χρόνων) πυκνώνουν τα γένεια. Στην τέταρτη (28 χρόνων) αυξάνει η δύναμη. Η εποχή του γάμου είναι στην πέμπτη (35 χρόνων). Στην έκτη (42 χρόνων) είναι η ακμή της διάνοιας. Στην έβδομη (49 χρόνων) βελτιώνεται και αναπτύσσεται τόσο η διάνοια όσο και η λογική. Στην όγδοη (56 χρόνων) όλα τελειοποιούνται. Στην ένατη (63 χρόνων) ο άνθρωπος είναι δίκαιος και ήπιος, τα πάθη στο μεγαλύτερο μέρος τους εξευγενίζονται. Και στη δέκατη (70 χρόνων) είναι το επιθυμητό τέλος μιας ζωής, παρόλο που τα οργανικά μέρη είναι ακόμη άθικτα. Διότι η υπερβολικά μεγάλη ηλικία συνήθως παραγκωνίζεται και βασανίζεται. Ο Σόλων, ο Αθηναίος νομοθέτης, αριθμεί επίσης την ανθρώπινη ζωή με τις προαναφερθείσες εβδομάδες. Και ο Ιπποκράτης ο ιατρός λέει ότι υπάρχουν επτά ηλικίες, του νήπιου, του παιδιού, του έφηβου, του νέου, του ενήλικα, του μεσόκοπου και του γέρου ανθρώπου· αυτές μετρώνται από εβδομάδες και δεν εκτείνονται πέραν του επτά. Και τα λόγια του είναι τα ακόλουθα: «Στη φύση του ανθρώπου υπάρχουν επτά εποχές, τις οποίες ονομάζουν ηλικίες, το νήπιο, το παιδί, ο έφηβος, κ.λπ. Και πραγματικά, η νηπιακή ηλικία εκτείνεται μέχρι την αλλαγή των δοντιών αυτή του παιδιού μέχρι την παραγωγή του σπέρματος, η οποία εκτείνεται ως δυο φορές τα επτά έτη. Ό έφηβος συνεχίζει μέχρι η γενειάδα να γίνει άγρια με μαλλιά· και ο νέος άντρας μέχρι την ανάπτυξη όλου του σώματος, που εκτείνεται μέχρι τέσσερις φορές τα επτά έτη. Ο ενήλικας συνεχίζει

μέχρι τα πενήντα έτη μείον ενός, δηλαδή μέχρι επτά φορές τα επτά έτη· και ο μεσόκοπος μέχρι τα πενήντα έξι έτη, δηλαδή επτά φορές τα οκτώ έτη. Όλα τα επόμενα έτη αφορούν το γέρο άνθρωπο».

Λέγεται επίσης, σχετικά με την ιδιόμορφη σύνθεση της εβδομάδας -καθώς έχει μια αξιοθαύμαστη τάξη στη φύση της, απαρτιζόμενη από το τρία και το τέσσερα- ότι ο τρίτος αριθμός από τη μονάδα στην ακολουθία των αριθμών που έχουν λόγο δύο προς ένα είναι τετράγωνο, ο τέταρτος είναι κύβος και ο έβδομος είναι κύβος και ταυτόχρονα τετράγωνο[45]. Άρα ο έβδομος αριθμός είναι αληθινά τελειοποιός, διακηρύσσοντας και τις δύο ισότητες, αυτή της επιφάνειας μέσω του τετράγωνου -σύμφωνα με τη συνάφεια προς την τριάδα- και αυτή του στερεού μέσω του κύβου -σύμφωνα με τη συνάφεια προς την τετράδα- γιατί η εβδομάδα απαρτίζεται από την τριάδα και την τετράδα. Η εβδομάδα, όμως, δεν είναι μόνο τελειοποιός, αλλά, ας μου επιτραπεί να πω, είναι η πλέον αρμονική και κατά κάποιον τρόπο η πηγή του πιο θαυμάσιου διαγράμματος που συμπεριλαμβάνει όλες τις αρμονίες, δηλαδή τη δια τεσσάρων, τη δια πέντε και τη δια πασών, καθώς επίσης όλες τις αναλογίες, την αριθμητική, τη γεωμετρική και την αρμονική. Αλλά το *πλινθίον*[46] απαρτίζεται από τους αριθμούς 6, 8, 9, και 12. Και πραγματικά, ο λόγος του 8 προς το 6 είναι επίτριτος σύμφωνα με τον οποίο υφίσταται η αρμονία δια τεσσάρων. Ο λόγος του 9 προς το 6 είναι ημιόλιος, σύμφωνα με τον οποίο υφίσταται η αρμονία δια πέντε. Ο λόγος του 12 προς το 6 είναι δύο προς ένα, ο οποίος σχηματίζει τη δια πασών αρμονία. Ομοίως περιέχει όλες τις αναλογίες· την αριθμητική στους αριθμούς 6, 9, και 12· διότι όπως ο μέσος αριθμός υπερβαίνει τον πρώτο κατά 3, ομοίως υπερβαίνεται από τον τελευταίο αριθμό κατά 3. Περιέχει όμως και τη γεωμετρική αναλογία στους τέσσερις αριθμούς 6, 8, 9 και 12. Διότι όπως είναι ο λόγος του 8 προς το 6, έτσι είναι ο λόγος του 12 προς το 9 και οι λόγοι αυτοί είναι επίτριτοι. Και περιέχει την αρμονική αναλογία στους τρεις αριθμούς 6, 8 και 12. Υπάρχουν ωστόσο δύο κριτήρια για την αρμονική αναλογία. Το πρώτο είναι ότι ο λόγος του

τελευταίου όρου προς τον πρώτο, ισούται με το λόγο της διαφοράς μεταξύ τελευταίου και μέσου όρου προς τη διαφορά μεταξύ μέσου και πρώτου όρου. Αυτό επαληθεύεται από τους προτεινόμενους αριθμούς 6, 8 και 12. Διότι ο λόγος του τελευταίου προς τον πρώτο όρο είναι δύο· και το 12 υπερβαίνει το 8 κατά 4, το 8 υπερβαίνει το 6 κατά 2. Δηλαδή 12:6=4:2. Το άλλο κριτήριο της αρμονικής αναλογίας είναι όταν ο μέσος όρος υπερβαίνει τους άκρους και υπερβαίνεται από αυτούς κατά ένα ίσο μέρος. Διότι το 8, που είναι ο μέσος όρος, υπερβαίνει τον πρώτο κατά το ένα τρίτο αυτού, δηλαδή 8-6=2, το ένα τρίτο του 6· και υπερβαίνεται από τον τελευταίο όρο κατά ένα ίσο μέρος του τελευταίου, διότι 12-8=4, το οποίο είναι το ένα τρίτο του 12. Είναι γεγονός πως όλα αυτά υφίστανται κατ' ανάγκη έτσι, όσον αφορά τη σεβαστή φύση αυτού του διαγράμματος, είτε είναι σωστό να το ονομάζουμε πλινθίον, είτε του δώσουμε άλλη ονομασία. Τόσες πολλές ιδέες, και ακόμη περισσότερες, εκθέτει η εβδομάδα σε πράγματα ασώματα και νοητά.

Αλλά η φύση της εκτείνεται ακόμη και σε κάθε ορατή ουσία διεισδύοντας σε ουρανό και γη, που είναι τα όρια του σύμπαντος. Διότι ποιο μέρος του κόσμου υπάρχει που να μη γοητεύεται από την εβδομάδα, τιθασευμένο από την αγάπη και την επιθυμία της; Λένε λοιπόν, κατ' αρχάς, ότι ο ουρανός περιβάλλεται από επτά κύκλους, που τα ονόματα τους είναι αρκτικός, ανταρκτικός, καλοκαιρινός τροπικός, χειμερινός τροπικός, ισημερινός, ζωδιακός και, πέραν αυτών, ο γαλαξίας. Διότι ο ορίζοντας ανήκει σε εμάς· σύμφωνα με την οξύτητα της όρασης μας, ή το αντίθετο, η αντίληψη της αίσθησης μας καθορίζεται από αυτόν σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό. Πραγματικά, οι πλανήτες, μια στρατιά που προχωρά σε μια πορεία αντίθετη από εκείνη των απλανών αστέρων, κατατασσόμενοι σε επτά τάξεις, συνδέονται πολυτρόπως με τον αέρα και τη γη. Διότι αυτοί ποικίλουν ανάλογα με τις λεγόμενες ετήσιες εποχές, προκαλώντας άπειρες αλλαγές σε καθεμία τους, με καθαρό και συννεφιασμένο καιρό και με άγριες ανεμοθύελλες. Αυτοί κάνουν τους ποταμούς να ξεχειλίζουν και να εξαφανίζονται, τις πεδιάδες να

γίνονται λιμνάζοντα νερά ή το αντίθετο, να έχουν άθλια εμφάνιση. Ομοίως, αυτοί προκαλούν τις αλλαγές της θάλασσας, τις πλημμυρίδες και τις αμπώτιδες. Διότι μερικές φορές οι κόλποι της θάλασσας, όταν αυτή αντηχεί από τις παλινδρομικές κινήσεις της, σχηματίζουν βαθιές όχθες· και λίγο αργότερα, όταν η θάλασσα επιστρέφει, γίνεται βαθύτερη και πλεύσιμη, όχι μόνο για τη μεταφορά μικρών φορτίων, αλλά και αναρίθμητου πλήθους μεγάλων πλοίων. Οι πλανήτες είναι που γεννούν όλα τα επίγεια ζώα, φυτά και καρπούς, τα αναπτύσσουν και τα τελειοποιούν προετοιμάζοντας τη φύση στο καθένα να διατρέξει την πορεία της· έτσι ώστε καινούργια λουλούδια να διαδεχθούν τα παλαιά και να φθάσουν στην ακμή τους, με σκοπό να εφοδιάσουν τα ζώα που έχουν ανάγκη με φοβερή αφθονία. Επιπλέον, η άρκτος, η οποία λέγεται πως είναι ο καθοδηγητής των ναυτικών, αποτελείται από επτά αστέρια· αυτήν κοιτάζουν οι πλοηγοί ανάμεσα σε δέκα χιλιάδες θαλάσσια μονοπάτια, επιχειρώντας κάτι απίστευτο και ανώτερο από ό,τι η ανθρώπινη κρίση θα περίμενε να κατορθώσει. Διότι κοιτάζοντας αυτά τα αστέρια, ως καθοδηγητικά φώτα, ανακαλύφθηκαν περιοχές που προηγουμένως ήταν άγνωστες, νησιά από στεριανούς και ήπειροι από νησιώτες. Ήταν αναγκαίο οι βαθιές πτυχές της γης και της θάλασσας να αποκαλυφθούν στο ζώο που είναι αγαπητό στη θεότητα, μέσω της αγνότατης ουσίας των ουρανών.

Πρέπει επίσης να προσθέσουμε ότι ο χορός των πλειάδων ολοκληρώνεται με μια εβδομάδα αστέρων, των οποίων η ανατολή και η δύση προκαλεί μεγάλα αγαθά σε όλα τα πράγματα. Διότι όταν δύουν, αυλάκια σκάβονται για τη σπορά· και όταν ανατέλλουν, γίνονται οι χαρούμενοι μαντατοφόροι της συγκομιδής. Με την ανατολή τους σηκώνονται οι χαρούμενοι σύζυγοι για να συλλέξουν την αναγκαία τροφή, την οποία ικανοποιημένοι αποθηκεύουν για καθημερινή χρήση. Ο ήλιος επίσης, ο ηγέτης της ημέρας, δημιουργώντας κάθε χρόνο δύο ισημερίες, την άνοιξη και το φθινόπωρο, την εαρινή στον Κριό και τη φθινοπωρινή στο Ζυγό, πιστοποιεί με τον πλέον έκδηλο τρόπο τη θεϊκή μεγαλειότητα της εβδομάδας. Διότι καθεμία από τις ισημερίες λαμβάνει χώρα τον

έβδομο μήνα, τον καιρό που ο νόμος παραγγέλλει να γιορτάζονται οι μεγαλύτερες και δημοφιλέστερες γιορτές, καθόσον και στις δυο ισημερίες οι καρποί της γης φθάνουν στην τελειοποίηση τους· την άνοιξη τα σιτηρά και άλλα σπαρτά, το φθινόπωρο η παραγωγή του κρασιού και των περισσότερων οπωροφόρων δέντρων. Από τη στιγμή που οι επίγειες φύσεις εξαρτώνται από τις ουράνιες κατά μια ορισμένη φυσική συμπάθεια, η ουράνια εκδηλωνόμενη παραγωγική αρχή της εβδομάδας κατέρχεται μέχρις εμάς, ώστε τα θνητά είδη να μπορούν να συμμετέχουν στην έλευση της.

Η ψυχή μας επίσης, εξαιρουμένου του κυβερνώντος μέρους της, διαιρείται σε επτά μέρη, δηλαδή τις πέντε αισθήσεις, το φωνητικό όργανο και την παραγωγική δύναμη. Αυτά τα μέρη, σαν σε αξιοθαύμαστες μηχανές, έλκονται από το κυβερνών μέρος λες και συνδέονται με κρυφές χορδές· άλλοτε ηρεμούν και άλλοτε κινούνται, το καθένα σύμφωνα με τις κατάλληλες συνήθειες και κίνητρα. Κατά παρόμοιο τρόπο, όποιος προσπαθήσει να εξερευνήσει τα εσωτερικά και εξωτερικά μέρη του σώματος, θα ανακαλύψει ότι και αυτά είναι επτά. Τα ορατά μέρη είναι το κεφάλι, το στήθος, η κοιλιά, τα δυο χέρια και τα δυο πόδια. Και τα εσωτερικά μέρη, που αποκαλούνται σπλάχνα, είναι το στομάχι, η καρδιά, οι πνεύμονες, η σπλήνα, το συκώτι και τα δυο νεφρά. Επίσης, το κατ' εξοχήν κυβερνών μέρος στο ζώο, το κεφάλι, έχει επτά απαραίτητα μέρη, δυο μάτια, δυο αυτιά, δυο ρουθούνια και έβδομο μέρος το στόμα, μέσω του οποίου, όπως λέει ο Πλάτων, εισέρχονται οι θνητές και εξέρχονται οι αθάνατες φύσεις. Διότι, πραγματικά, το φαγητό και το ποτό εισέρχονται μέσα) αυτού, τα οποία είναι η φθαρτή τροφή του φθαρτού σώματος· αλλά από το λογικό της αθάνατης ψυχής εξέρχονται οι αθάνατοι νόμοι, με τους οποίους κυβερνάται η έλλογη ζωή. Επίσης, τα υποκείμενα της κριτικής δύναμης της όρασης, της πιο εξαίρετης από τις αισθήσεις, συμμετέχουν σύμφωνα με το είδος στον αριθμό επτά. Διότι υπάρχουν επτά πράγματα που βλέπονται: σώμα, απόσταση, μέγεθος, χρώμα, κίνηση και ακινησία· πέραν αυτών τίποτε άλλο. Και οι παραλλαγές της φωνής είναι επτά: ο οξύς, ο βαρύς, ο πε-

ρισπώμενος, ο τραχύς, ο αβρός, ο μακρύς και ο βραχύς ήχος.

Επιπλέον, υπάρχουν επτά κινήσεις: πάνω, κάτω, δεξιά, αριστερά, μπροστά, πίσω και κυκλικά- η τελευταία κίνηση φαίνεται ιδιαίτερα από το άλμα. Λέγεται επίσης ότι οι εκκρίσεις του σώματος υπόκεινται σε αυτόν τον αριθμό· τα δάκρυα που εκχέονται από τα μάτια, οι αποκαθάρσεις από το κεφάλι μέσω των ρουθουνιών, ο σίελος που εκβάλλουμε από το στόμα, οι δύο εκκενώσεις που απομακρύνουν τα περιττά -η μια μπροστά και η άλλη πίσω- η έκχυση ιδρώτα μέσω του σώματος και έβδομη η φυσικότατη εκροή σπέρματος μέσω των γεννητικών οργάνων. Σε μεγάλο ποσοστό η έμμηνη ρύση των γυναικών διαρκεί επτά ημέρες· και το νήπιο μέσα στη μήτρα είναι από τη φύση προσαρμοσμένο να ζωογονείται στους επτά μήνες, ένα γεγονός αρκετά παράδοξο. Γιατί τα έμβρυα που γεννιούνται τον έβδομο μήνα, ζουν ενώ εκείνα που γεννιούνται τον όγδοο μήνα, ως επί το πλείστον, πεθαίνουν. Παρομοίως, σοβαρές ασθένειες του σώματός μας, ιδιαίτερα όταν λόγω κακής θερμοκρασίας του σωματικού δυναμικού προσβαλλόμαστε από συνεχείς πυρετούς, κρίνονται κυρίως την έβδομη ημέρα. Διότι η ημέρα αυτή κρίνει τον αγώνα της ψυχής, σε κάποιους απονέμοντας σωτηρία και σε άλλους θάνατο.

Ωστόσο, η δύναμη αυτού του αριθμού δεν εκτείνεται μόνο στα όσα επί μέρους προαναφέρθηκαν, αλλά επίσης στις καλύτερες των επιστημών, στη γραμματική και τη μουσική. Πραγματικά, η λύρα, που αποτελείται από επτά χορδές, ανάλογη προς το χορό των επτά πλανητών, παράγει τις πιο ευγενικές αρμονίες και είναι σχεδόν ο ηγέτης όλης της οργανικής μουσικής. Επίσης, ανάμεσα στα στοιχεία της γραμματικής, επτά είναι τα φωνήεντα -ορθώς αποκαλούνται έτσι, εφόσον φαίνεται ότι παράγουν ήχο από μόνα τους και συνδυαζόμενα με άλλα γράμματα σχηματίζουν έναρθρους ήχους. Αυτά παρέχουν εκείνο που λείπει στα ημίφωνα, προσφέροντας ολόκληρους ήχους· μεταβάλλουν δε τις φύσεις των συμφώνων, εμπνέοντος τους την κατάλληλη δύναμη, έτσι ώστε πράγματα που προηγουμένως ήταν άφατα, να μπορούν

να γίνουν ρητά. Εκείνοι λοιπόν που πρώτοι έδωσαν ονόματα στα γράμματα, όντας σοφοί άνθρωποι, μου φαίνεται ότι ονόμασαν αυτόν τον αριθμό *επτά,* εξαιτίας του σεβασμού και της έμφυτης ιερότητας που τον χαρακτηρίζει (από του περί αυτόν πεβασμού, καί της προσούσης σεμνότητος). Οι Ρωμαίοι, προσθέτοντας στην αρχή το γράμμα *σ,* το οποίο λείπει στα Ελληνικά, παρουσιάζουν ευκρινέστερα την καταγωγή του, αποκαλώντας τον *septem,* λόγω του σεβασμού και της ιερότητας του.

Σύμφωνα δε με τον Ηρόφιλο, καθώς πληροφορούμαστε από το Θέωνα το Σμυρναίο[47], το ανθρώπινο έντερο είναι 28 κύβιτα[48] δηλαδή τέσσερις φορές το επτά· και το 28 είναι ένας τέλειος αριθμός. Η σελήνη επίσης λέγεται ότι μεταδίδει ουράνιες δυνάμεις από τις αιθερικές στις επίγειες περιοχές, χρησιμοποιώντας την τετράδα και την εβδομάδα. Ομοίως η αύξηση και μείωση των πραγμάτων, ιδιαίτερα εκείνων που είναι σε υγρή κατάσταση, ακολουθούν τις φάσεις της σελήνης. Έτσι, ένας Έλληνας ποιητής -που αναφέρεται από τον Μπατίστα Καμότιους (Baptista Camotius) στο έργο του *Σχόλιο πάνω στη Μεταφυσική του Θεόφραστου-* λέει για τη σελήνη ότι «όταν αυτή αυξάνεται, μεγεθύνει, και όταν ελαττώνεται, φθίνει όλα τα πράγματα».

Επίσης, αυτός ο αριθμός είναι το συντομότατο όριο γέννησης παιδιών. Σύμφωνα με τον Ηφαιστίωνα το Θηβαίο, το μέγιστο όριο διάρκειας μέσα στη μήτρα εκείνων των παιδιών που γεννιούνται το δέκατο μήνα, είναι 288 ημέρες και 8 ώρες. Η μέση διάρκεια είναι 273 ημέρες και 8 ώρες. Και η πλέον σύντομη διάρκεια είναι 258 ημέρες και 8 ώρες. Αλλά για εκείνα τα παιδιά που γεννιούνται τον έβδομο μήνα, η μέγιστη διάρκεια μέσα στη μήτρα είναι 206 ημέρες και 8 ώρες, η ελάχιστη διάρκεια είναι 176 ημέρες και 8 ώρες και η μέση διάρκεια είναι 191 ημέρες και 8 ώρες. Επίσης, οι αρχαίοι ιατροί, όπως μαθαίνουμε από τον ανώνυμο συγγραφέα, είχαν παρατηρήσει ότι επτά ώρες προτού τη γέννα ο ομφαλός του εμβρύου χωρίζεται αυτόματα από τη μητέρα· σε αυτό το διάστημα το έμβρυο είναι ικανό να συντηρείται στη ζωή, χωρίς να λαμβάνει καμία τροφή από τη μητέρα[49].

Ο Θέων ο Σμυρναίος λέει πως ο Πλάτωνας, ακολουθώντας τη φύση, συγκροτεί την ψυχή από επτά αριθμούς, τους 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27. Όσον αφορά τις αξιοσημείωτες ιδιότητες τους, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην πραγματεία του Πλούταρχου *Περί της Γένεσης της Ψυχής σύμφωνα με τον Πλάτωνα στον Τίμαιο.*

Επιπλέον, σύμφωνα με όσα έχω αναφέρει για τους προηγούμενους αριθμούς, αν το 7 πολλαπλασιάσει έναν τριγωνικό γνώμονα και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας εννεαγωνικός γνώμων. Δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{r}7 \times 1 \text{ και } +1 = 8 \text{ ο δεύτερος}\\ 7 \times 2 \text{ και } +1 = 15 \text{ ο τρίτος}\\ 7 \times 3 \text{ και } +1 = 22 \text{ ο τέταρτος}\\ 7 \times 4 \text{ και } +1 = 29 \text{ ο πέμπτος}\end{array}\right\}\text{εννεαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με οκτάγωνα, με τετράγωνα, με πενταγωνικές, κιονοειδείς, τριγωνικές πυραμίδες, με τετράγωνους γνώμονες και με γνώμονες οκταγώνων, θα παραχθούν εννεαγωνικοί γνώμονες. Έτσι,

$$\left.\begin{array}{r}7 \times 1 \text{ και } +1 = 8 \text{ ο δεύτερος}\\ 7 \times 8 \text{ και } +1 = 57 \text{ ο ένατος}\\ 7 \times 21 \text{ και } +1 = 148 \text{ ο εικοστός δεύτερος}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{εννεαγωνικός}\\ \text{γνώμων}\end{array}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r}7 \times 1 \text{ και } +1 = 8 \text{ ο δεύτερος}\\ 7 \times 4 \text{ και } +1 = 29 \text{ ο πέμπτος}\\ 7 \times 9 \text{ και } +1 = 64 \text{ ο δέκατος}\end{array}\right\}\text{εννεαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r}7 \times 1 \text{ και } +1 = 8 \text{ ο δεύτερος}\\ 7 \times 6 \text{ και } +1 = 43 \text{ ο έβδομος}\\ 7 \times 18 \text{ και } +1 = 127 \text{ ο δέκατος ένατος}\end{array}\right\}\text{εννεαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

7 x 1 και +1 = 8 ο δεύτερος
7 x 3 και +1 = 22 ο τέταρτος } εννεαγωνικός γνώμων
7 x 5 και +1 = 36 ο έκτος

κ.λπ.

7 x 1 και +1 = 8 ο δεύτερος
7 x 7 και +1 = 50 ο όγδοος } εννεαγωνικός γνώμων
7 x 13 και +1 = 92 ο δέκατος τέταρτος

κ.λπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVII

Σχετικά με την ογδοάδα
την εννεάδα και τη δεκάδα.

«Η ογδοάδα», λέει ο Μαρτιάνους Κάπελα, «είναι τέλεια, επειδή καλύπτεται από την εξάδα, διότι κάθε κύβος έχει έξι επιφάνειες. Ομοίως, αντλεί την ολοκλήρωσή της από διαδοχικούς περιττούς αριθμούς. Διότι ο πρώτος περιττός αριθμός είναι το 3 και ο δεύτερος το 5, και 3 + 5 = 8. Επίσης, ο κύβος που σχηματίζεται από την τριάδα, δηλαδή το 27, συντίθεται από τρεις διαδοχικούς περιττούς αριθμούς, δηλαδή από τους 7, 9 και 11. Επίσης, ο τρίτος κύβος, που σχηματίζεται από την τετράδα, δηλαδή το 64, αντλεί την ολοκλήρωσή του από τέσσερις διαδοχικούς περιττούς αριθμούς, δηλαδή από τους 13, 15, 17, 19· διότι το άθροισμά τους είναι 64. Θα βρεθεί λοιπόν ότι όλοι οι κύβοι συντίθενται από τόσους περιττούς αριθμούς, όσες είναι οι μονάδες στη ρίζα τους. Επιπλέον, ο κύβος του οκτώ είναι ο πρώτος από όλους τους κύβους, κατά τον ίδιο τρόπο που η μονάδα είναι η πρώτη όλων των αριθμών». Αρκετά σχετικά με τον Κάπελα.

Στο κεφάλαιο που αναφέρεται στις ιδιότητες της μονάδας, δείξαμε από τον Πλούταρχο ότι αν το 8 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε τριγωνικό αριθμό και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας τετράγωνος αριθ-

μός. Αποδείξαμε επίσης ότι αν το τριπλάσιο του 8, δηλαδή το 24, πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε πενταγωνικό αριθμό και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι επίσης ένας τετράγωνος αριθμός.

Επιπροσθέτως, σύμφωνα με όσα παρουσιάσαμε για τους προηγούμενους αριθμούς της δεκάδας, αν το 8 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε τριγωνικό ή εννεαγωνικό γνώμονα, ή οποιονδήποτε γνώμονα τετραγώνου, ή οποιοδήποτε τετράγωνο, ή την πρώτη εξαγωνική πυραμίδα, ή οποιοδήποτε εννεάγωνο και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας δεκαγωνικός γνώμων. Δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{r}8 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 9 \text{ ο δεύτερος}\\ 8 \text{ x } 2 \text{ και } +1 = 17 \text{ ο τρίτος}\\ 8 \text{ x } 3 \text{ και } +1 = 25 \text{ ο τέταρτος}\end{array}\right\}\text{ δεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r}8 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 9 \text{ ο δεύτερος}\\ 8 \text{ x } 8 \text{ και } +1 = 65 \text{ ο ένατος}\\ 8 \text{ x } 15 \text{ και } +1 = 121 \text{ ο δέκατος έκτος}\end{array}\right\}\text{ δεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r}8 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 9 \text{ ο δεύτερος}\\ 8 \text{ x } 3 \text{ και } +1 = 25 \text{ ο τέταρτος}\\ 8 \text{ x } 5 \text{ και } +1 = 41 \text{ ο έκτος}\end{array}\right\}\text{ δεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r}8 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 9 \text{ ο δεύτερος}\\ 8 \text{ x } 4 \text{ και } +1 = 33 \text{ ο πέμπτος}\\ 8 \text{ x } 9 \text{ και } +1 = 73 \text{ ο δέκατος}\end{array}\right\}\text{ δεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{r}8 \text{ x } 1 \text{ και } +1 = 9 \text{ ο δεύτερος}\\ 8 \text{ x } 7 \text{ και } +1 = 57 \text{ ο όγδοος}\\ 8 \text{ x } 22 \text{ και } +1 = 177 \text{ ο εικοστός τρίτος}\end{array}\right\}\text{ δεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{l} 8 \times 1 \text{ και } +1 = 9 \text{ ο δεύτερος} \\ 8 \times 9 \text{ και } +1 = 73 \text{ ο δέκατος} \\ 8 \times 24 \text{ και } +1 = 193 \text{ ο εικοστός πέμπτος} \end{array}\right. \text{ δεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

Όσον αφορά ης ιδιότητες της εννεάδας κατ' αρχήν αναφέρουμε ότι απαρτίζεται από τους τρεις αριθμούς 2, 3 και 4, που βρίσκονται σε φυσική σειρά και στους οποίους περιέχονται οι λόγοι των συμφωνιών. Διότι ο λόγος του 4 προς το 3 είναι επίτριτος και σχηματίζει τη δια τεσσάρων συμφωνία. Ο λόγος του 3 προς το 2 είναι ημιόλιος και σχηματίζει τη δια πέντε συμφωνία. Και ο λόγος του 4 προς το 2 είναι δύο προς ένα, στον οποίο συνίσταται η δια πασών.

Επίσης, αν το 9 πολλαπλασιάσει οποιονδήποτε τριγωνικό, τετραγωνικό, ή δεκαγωνικό γνώμονα, ή οποιοδήποτε τετράγωνο ή δεκάγωνο και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι ένας ενδεκαγωνικός γνώμων. Δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{l} 9 \times 1 \text{ και } +1 = 10 \text{ ο δεύτερος} \\ 9 \times 2 \text{ και } +1 = 19 \text{ ο τρίτος} \\ 9 \times 3 \text{ και } +1 = 28 \text{ ο τέταρτος} \end{array}\right\} \text{ ενδεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{l} 9 \times 1 \text{ και } +1 = 10 \text{ ο δεύτερος} \\ 9 \times 3 \text{ και } +1 = 28 \text{ ο τέταρτος} \\ 9 \times 5 \text{ και } +1 = 46 \text{ ο έκτος} \end{array}\right\} \text{ ενδεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{l} 9 \times 1 \text{ και } +1 = 10 \text{ ο δεύτερος} \\ 9 \times 9 \text{ και } +1 = 82 \text{ ο δέκατος} \\ 9 \times 17 \text{ και } +1 = 154 \text{ ο δέκατος όγδοος} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{ενδεκαγωνικός} \\ \text{γνώμων}\end{array}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{l} 9 \times 1 \text{ και } +1 = 10 \text{ ο δεύτερος} \\ 9 \times 4 \text{ και } +1 = 37 \text{ ο πέμπτος} \\ 9 \times 9 \text{ και } +1 = 82 \text{ ο δέκατος} \end{array}\right\} \text{ ενδεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

9 x 1 και +1 = 10 ο δεύτερος
9 x 10 και +1 = 91 ο ενδέκατος
9 x 27 και +1 = 244 ο εικοστός όγδοος
} ενδεκαγωνικός γνώμων

κ.λπ.

Στη συνέχεια, σχετικά με τις ιδιότητες της δεκάδας, πρέπει να παρατηρηθεί ότι η μονάδα είναι βέβαια η μορφή όλων των αριθμητικών μορφών, αλλά κυρίως της δεκάδας. Διότι αυτό που είναι απλώς η μονάδα σε όλη τη σειρά των αριθμών, αυτό είναι και η δεκάδα στις επόμενες εκατοντάδες, χιλιάδες και εκατομμύρια· για τούτο, σύμφωνα με μια δευτερογενή πρόοδο, χαρακτηρίζεται μονάδα. Και επειδή αποτελεί την απόλυτη τελειότητα των όντων, περιέχει όλα τα πράγματα στην πολύμορφη φύση της. Διότι κάθε αναλογία υφίσταται μέσα στον αριθμό αυτό· η αριθμητική σε μια φυσική πρόοδο αριθμών από τη μονάδα· η γεωμετρική στους αριθμούς 1, 2, 4 και 1, 3, 9· η αρμονική στους αριθμούς 2, 3, 6 και 3, 4, 6.

Επιπλέον, θα βρεθεί ότι αν το 10 πολλαπλασιάσει οποιοδήποτε γνώμονα τριγώνου, τετραγώνου, ή ενδεκαγώνου, ή οποιοδήποτε τετράγωνο ή ενδεκάγωνο, και η μονάδα προστεθεί στο γινόμενο, το άθροισμα θα είναι πάντοτε ένας δωδεκαγωνικός γνώμων. Δηλαδή,

10 x 1 και +1 = 11 ο δεύτερος
10 x 2 και +1 = 21 ο τρίτος
10 x 3 και +1 = 31 ο τέταρτος
} δωδεκαγωνικός γνώμων

κ.λπ.

10 x 1 και +1 = 11 ο δεύτερος
10 x 3 και +1 = 31 ο τέταρτος
10 x 5 και +1 = 51 ο έκτος
} δωδεκαγωνικός γνώμων

κ.λπ.

10 X 1 και +1 = 11 ο δεύτερος
10 x 10 και +1 = 101 ο ενδέκατος
10 X 19 και +1 = 191 ο εικοστός
} δωδεκαγωνικός γνώμων

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{10 x 1 και +1 = 11 ο δεύτερος}\\ \text{10 x 4 και +1 = 41 ο πέμπτος}\\ \text{10 x 9 και +1 = 91 ο δέκατος}\end{array}\right\}\text{ δωδεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{10 x 1 και +1 = 11 ο δεύτερος}\\ \text{10 x 11 και +1 = 111 ο δωδέκατος}\\ \text{10 x 30 και +1 = 301 ο τριακοστός πρώτος}\end{array}\right\}\text{ δωδεκαγωνικός γνώμων}$$

κ.λπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVIII

Επιπρόσθετες παρατηρήσεις για τους αριθμούς.

Οι Πυθαγόρειοι, λέει ο Πλούταρχος στην πραγματεία του *Περί Ίσιδος και Οσίριδος,* κοσμούσαν τους αριθμούς και τα σχήματα με τις ονομασίες των Θεών. Πράγματι αποκαλούσαν το ισόπλευρο τρίγωνο Αθηνά Κορυφαγένη (ή γεννημένη από την κορυφή) και Τριτογένεια, επειδή διαιρείται από τρεις καθέτους που φέρονται από τις τρεις γωνίες. Ονόμαζαν τη μονάδα ή *το ένα* Απόλλωνα, επειδή πείστηκαν από έναν προφανή λόγο (επειδή ο Απόλλωνας υποδηλώνει απομόνωση από το πλήθος και την απλότητα της μονάδας[50]).

Επίσης, αποκάλεσαν τη δυάδα διαμάχη και τόλμη· και την τριάδα δικαιοσύνη. Διότι εφόσον το βλάπτειν και το βλάπτεσθαι υφίστανται σύμφωνα με την υπερβολή και την έλλειψη, η δικαιοσύνη, εξαιτίας της ισότητας, είναι μια μέση κατάσταση. Αλλά αυτό που ονομάζεται τετρακτύς, όντας ο αριθμός 36, ήταν, σύμφωνα με κοινή μαρτυρία, ο μεγαλύτερος όρκος ανάμεσα τους. Ονομαζόταν δε ο κόσμος, επειδή συγκροτείτο από τους πρώτους τέσσερις άρτιους και τους πρώτους τέσσερις περιττούς αριθμούς[51].

Στην ίδια πραγματεία, λέει: «Μυθολογείται από τους Αιγυπτίους ότι ο θάνατος του Οσίριδος συνέβη τη 17η ημέρα του μήνα, περίοδο κατά την οποία είναι ιδιαίτερα φανερό

ότι η σελήνη είναι στη γέμιση. Για αυτό οι Πυθαγόρειοι ονομάζουν αυτή την ημέρα *αντίπραξις,* εμπόδιο ή αντίθεση και αποστρέφονται πλήρως τον αριθμό αυτό. Διότι το 17, ως μέσος ανάμεσα στον τετράγωνο 16 και τον επιμήκη 18 (οι μόνοι επίπεδοι αριθμοί που έχουν τις περιμέτρους τους ίσες με τα περιεχόμενα εμβαδά τους), τους φέρνει σε σύγκρουση και διαχωρίζει τον ένα από τον άλλο, και διαιρούμενος σε άνισα μερίδια σχηματίζει τον επόγδοο λόγο»· (δηλαδή με μία διαίρεση στο 9 και το 8).

Το ότι οι περίμετροι των δύο αυτών αριθμών 16 και 18 είναι ίσες προς τα εμβαδά τους είναι φανερό. Διότι το 16 είναι ένα τετράγωνο που κάθε πλευρά του είναι 4 και ο αριθμός των πλευρών είναι 4. Και το 18 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παραλληλόγραμμο που οι τέσσερις πλευρές του είναι 6, 6, 3, 3, το άθροισμα των οποίων είναι 18.

Έχει παρατηρηθεί από το Μαρτιάνους Κάπελα ότι αν ο αριθμός 5 πολλαπλασιαστεί είτε με τον εαυτό του, είτε με οποιονδήποτε περιττό αριθμό, το γινόμενο πάντοτε λήγει σε 5. Έχω επίσης επισημάνει ότι το 6, όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του, λήγει πάντοτε σε 6, ότι εαν πολλαπλασιάσει έναν άρτιο αριθμό, το γινόμενο θα λήγει πάντοτε σε αυτόν τον ίδιο αριθμό τον οποίο πολλαπλασιάζει ή στο τελευταίο ψηφίο αυτού. Έτσι 2 x 6=12· 4 x 6=24· 6 x 6=36, 8x6=48· 10x6=60· 12x6=72· 14x6= 84· 16x6=96· 18x6=108, κ.λπ. Αυτό δείχνει την ανωτερότητα του περιττού έναντι του άρτιου. Διότι το 5 υπερνικά τον περιττό αριθμό που πολλαπλασιάζει, κάνοντάς τον να λήγει στον εαυτό του· αλλά το 6 υπερνικάται από τον άρτιο αριθμό που πολλαπλασιάζει και λήγει σε αυτόν.

Ο Ιάμβλιχος, στο *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής,* σελ. 47, παρατηρεί για τον αριθμό 6 ότι «εκτός του ότι είναι ένας τέλειος αριθμός, είναι ο πρώτος αρτιοπέρισσος αριθμός και ο πρώτος από τους ετερομήκεις αριθμούς. Και προσθέτει ότι ονομαζόταν *γάμος* από τους Πυθαγόρειους, επειδή η πρώτη συνένωση του αρσενικού και θηλυκού υφίσταται από την ανάμιξη[52] σύμφωνα με αυτόν τον αριθμό.

Ως συνέπεια επίσης της ολοκληρίας και της συμμετρίας που περεχεί, τον αποκαλούσαν υγεία και κάλλος».

Οι ακόλουθες ιδιότητες του 6 και του 8 είναι αξιοσημείωτες και πιστεύω ότι διέφυγαν της προσοχής τόσο των αρχαίων όσο και των σύγχρονων μαθηματικών. Αφορούν τον σχηματισμό των τετραγώνων από τη συνεχή πρόσθεση αυτών των αριθμών με τους εαυτούς τους μαζί με τη μονάδα.

Για παράδειγμα, 1+6+6+6+6 =25, δηλαδή 1+(6x4)= 25 και 25+(6 x 16)=121, 121+(6 x 28)=289, και 289+(6x40) =529. Και το ίδιο για τους υπόλοιπους. Δηλαδή το 1 προστιθέμενο στο τέσσερις φορές το 6 ισούται με 25· αυτό προστιθέμενο στο 16 φορές το 6 ισούται με 121· το 121 προστιθέμενο στο 28 φορές το 6 ισούται με 289, κ.λπ. Παρατηρείται ότι οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που παράγονται έτσι, διαφέρουν η μία από την άλλη κατά 6. Διότι οι ρίζες είναι 5, 11, 17, 23, κ.λπ., ενώ η διαφορά των πολλαπλασιαζόμενων αριθμών είναι πάντοτε 12. Έτσι ο πρώτος πολλαπλασιαστής είναι 4, ο δεύτερος 16, ο τρίτος 28, ο τέταρτος 40, και η διαφορά μεταξύ τους είναι 12.

Όσον αφορά το 8 έχουμε 1 +8 = 9 + (8 x 2) = 25 + (8 x 3) = 49 +(8x4)=81+(8x5)=121+ (8x6)=169. Έτσι οι ρίζες των τετραγώνων είναι οι περιττοί αριθμοί 3, 5, 7, 9, 11, 13, κ.λπ., που διαφέρουν η μία από την άλλη κατά 2· και οι πολλαπλασιαζόμενοι αριθμοί είναι 2, 3, 4, 5, 6, κ.λπ. Το άθροισμα 1+ 4+4, κ.λπ., θα παράγει ομοίως τους ίδιους τετράγωνους αριθμούς, καθώς και το 1+8+8, κ.λπ.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Σελ. 66-67: *Ομοίως η κίνηση των άστρων υμνείται ως συνοδευόμενη από αρμονικές μετατονίσεις.* «Οι Πυθαγόρειοι», λέει ο Σιμπλίκιος στα Σχόλια του στο 2ο βιβλίο της πραγματείας του Αριστοτέλη *Περί Ουρανού,* «έλεγαν ότι ένας αρμονικός ήχος παραγόταν από την κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Επιστημονικά το στήριζαν από την αναλογία των διαστημάτων τους, εφόσον όχι μόνον οι λόγοι του ήλιου και της σελήνης, της Αφροδίτης και του Ερμή, αλλά και των άλλων αστέρων, ανακαλύφθηκαν από αυτούς». Και ο Σιμπλίκιος προσθέτει: «Ίσως η ένσταση του Αριστοτέλη σε αυτόν τον ισχυρισμό μπορεί να απαντηθεί σύμφωνα με τη φιλοσοφία των Πυθαγορείων ως ακολούθως: Δεν είναι όλα τα πράγματα σύμμετρα μεταξύ τους, ούτε καθετί είναι αισθητό σε όλους, ακόμη και στην επίγεια περιοχή. Αυτό είναι φανερό από τους σκύλους, που οσφραίνονται ζώα σε μεγάλη απόσταση, τα οποία δεν μπορούν να οσφρανθούν οι άνθρωποι. Πολύ περισσότερο, επομένως, σε πράγματα που διαχωρίζονται από τόσο μεγάλο διάστημα, όπως τα άφθαρτα από τα φθαρτά, οι ουράνιες από τις επίγειες φύσεις. Είναι λοιπόν αληθινό να πούμε ότι ο ήχος των θεϊκών σωμάτων δεν ακούγεται από τα γήινα αυτιά; Αλλά αν κάποιος, όπως ο Πυθαγόρας, που αναφέρεται ότι είχε ακούσει αυτήν την αρμονία, έχει απαλλαγεί από το επίγειο σώμα του και έχει εξαγνίσει το φωτεινό και ουράνιο όχημα[53] του, καθώς και τις αισθήσεις του, είτε μέσω καλής κατανομής, είτε μέσω εντιμότητας ζωής, είτε μέσω της τελειοποίησης που προκύπτει από ιερές λειτουργίες, τότε αυτός θα αντιλαμβάνεται πράγματα αόρατα στους άλλους και θα ακούει πράγματα που δεν

ακούν οι άλλοι. Αν όμως κάποιος ήχος παράγεται από τα θεϊκά και άυλα σώματα, αυτός δεν είναι ούτε αποκρουστικός, ούτε καταστροφικός, αλλά διεγείρει τις δυνάμεις και τις ενέργειες των επίγειων ήχων και τελειοποιεί την αίσθηση που συνεργάζεται με αυτές. Έχει επίσης κάποια αναλογία προς τον ήχο που συγκλίνει με την κίνηση των ουράνιων σωμάτων. Και ο ήχος που είναι μαζί μας, ως συνέπεια της ηχητικής φύσης του αέρα, είναι κάποια ενέργεια της κίνησης του απαθούς ήχου τους. Αν λοιπόν ο αέρας εκεί δεν είναι απαθής, είναι φανερό ότι ούτε ο ήχος που υπάρχει εκεί, είναι απαθής. Ο Πυθαγόρας, όμως, φαίνεται ότι είχε πει ότι άκουσε την ουράνια αρμονία, επειδή κατανόησε τις αρμονικές αναλογίες στους αριθμούς των ουράνιων σωμάτων και αυτό που μπορεί να ακουστεί σε αυτά. Κάποιος όμως μπορεί, πολύ ορθά, να αμφιβάλλει. Γιατί τα αστέρια είναι ορατά από την αίσθηση της όρασης μας, αλλά ο ήχος τους δεν μπορεί να ακουστεί από τα αυτιά μας; Σε αυτό απαντούμε ότι ούτε τα αστέρια τα ίδια τα βλέπουμε· διότι δε βλέπουμε τα μεγέθη τους, ή τα σχήματά τους, ή την ανυπέρβλητη ομορφιά τους. Ούτε βλέπουμε την κίνηση μέσω της οποίας παράγεται ο ήχος· αλλά βλέπουμε κάποιο φως αυτών, όπως αυτό του ήλιου προς τη γη, ενώ ο ίδιος ο ήλιος δεν είναι ορατός από εμάς. Ίσως επίσης δε θα πρέπει να μας ξενίζει το γεγονός ότι η αίσθηση της όρασης, καθώς είναι περισσότερο άυλη και υφίσταται μάλλον σύμφωνα προς την ενέργεια παρά σύμφωνα προς το πάθος και υπερβαίνει κατά πολύ τις άλλες αισθήσεις, θα έπρεπε να θεωρηθεί άξια να δεχθεί τη λαμπρότητα και τη φωτεινότητα των ουρανίων σωμάτων, ενώ ότι οι άλλες αισθήσεις δεν είναι κατάλληλες για το σκοπό αυτό. Σχετικά όμως με αυτά και άλλα τέτοια μερικά, αν κάποιος μπορεί να προσδιορίσει άλλες πιθανές αιτίες, ας τον θεωρούμε φίλο και όχι εχθρό».

Σελ. 67: *«Και δεν μπορεί να αμφισβητηθεί ότι η αριθμητική εκ φύσεως υπερέχει της αστρονομίας, εφόσον φαίνεται ότι είναι αρχαιότερη από τη γεωμετρία και τη μουσική, που προηγούνται της αστρονομίας.*

Αυτή επίσης ήταν η άποψη των Πυθαγορείων, των οποίων το δόγμα σχετικά με το διαχωρισμό αυτών των τεσσάρων μαθηματικών επιστημών ήταν, σύμφωνα με τον Πρόκλο στα Σχόλια του στον Ευκλείδη, σελ. 10, το ακόλουθο: «Οι Πυθαγόρειοι διαχώριζαν σε τέσσερα μέρη ολόκληρη τη μαθηματική επιστήμη. Απέδιδαν το ένα από τα μέρη της στο *πόσα πολλά,* και το άλλο στο *πόσο πολύ.* Καθένα από αυτά τα μέρη, το διαχώριζαν σε δύο. Διότι έλεγαν ότι ορισμένη ποσότητα ή το πόσα πολλά, είτε υφίσταται καθεαυτή, είτε ερευνάται σε σχέση προς κάτι άλλο. Και ότι το πηλίκον[54], ή το πόσο πολύ, είναι είτε σταθερό, είτε σε κίνηση. Ομοίως, έλεγαν ότι η αριθμητική ερευνά την ορισμένη ποσότητα που υφίσταται καθεαυτή, ενώ η μουσική εκείνο που υπάρχει αναφορικά προς κάτι άλλο. Και ότι η γεωμετρία μελετά το πηλίκον που είναι ακίνητο, αλλά η σφαιρική (ή αστρονομία) εκείνο που είναι από μόνο του, ή κατ' ουσία, κινητό. Επιπλέον βεβαίωναν ότι η ορισμένη ποσότητα και το πηλίκον δεν εξετάζουν απλώς το μέγεθος ή το πλήθος, αλλά εκείνο που στο καθένα από αυτά, είναι ορισμένο. Διότι οι επιστήμες μελετούν μόνο το ορισμένο, απορρίπτοντας ως μάταια την κατανόηση της αόριστης ποσότητας. Όταν όμως οι άνθρωποι αυτοί, που ήταν καθολικά σοφοί, καθόριζαν αυτήν την κατανομή, δεν πρέπει να υποθέτουμε ότι αυτοί έστρεφαν την προσοχή τους σε εκείνη την ορισμένη ποσότητα που βρίσκεται στα αισθητά, ή σε εκείνο το πηλίκον που φαίνεται να υπάρχει σχετικά με τα σώματα· διότι είναι έργο της φυσιολογίας, νομίζω, να ερευνά αυτά, και όχι της μαθηματικής επιστήμης. Αλλά εφόσον ο δημιουργός θεώρησε δεδομένο την ένωση και τη διαίρεση των όλων, την ομοιότητα και τη διαφορά αυτών, με σκοπό την ολοκλήρωση της ψυχής, και εκτός αυτών, την ακινησία και την κίνηση, και, όπως ο *Τίμαιος* μας διδάσκει, συγκρότησε την ψυχή από αυτά τα είδη, πρέπει να πούμε ότι η συλλογιστική ενέργεια της λογικής, που συμμορφώνεται σύμφωνα προς την ανομοιότητά της, τη διαίρεση των παραγωγικών αρχών και το πλήθος της, δίνει υπόσταση στην αριθμητική· και ότι σύμφωνα με την ένωση του πλήθους και την επικοινωνία με τον εαυτό της παράγει τη

γεωμετρία. Κατανοώντας ομοίως τον εαυτό της να είναι συγχρόνως και ένα και πολλά, παράγει τους αριθμούς και τη γνώση αυτών. Αλλά εξασφαλίζει για τον εαυτό της μουσική, σύμφωνα προς το δεσμό με τον οποίο συγκρατείται. Άρα, η αριθμητική είναι αρχαιότερη από τη μουσική, εφόσον η ψυχή πρώτα διαχωρίστηκε κατά ένα δημιουργικό τρόπο και κατόπιν συνενώθηκε από αρμονικούς λόγους, όπως ο Πλάτωνας αφηγείται στον *Τίμαιο*. Η συλλογιστική ενέργεια της λογικής, όντας εδραιωμένη σύμφωνα προς μια μόνιμη ενέργεια μέσα στον εαυτό της, ξεδιπλώνει από τον εαυτό της τη γεωμετρία και τις δημιουργικές αρχές όλων των σχημάτων[55]. Σύμφωνα δε προς την έμφυτη κίνηση της, παράγει τη σφαιρική επιστήμη (αστρονομία). Διότι αυτή επίσης κινείται σύμφωνα με κύκλους· αλλά είναι εγκαθιδρυμένη με αμετάβλητη ομοιότητα σύμφωνα προς τις αιτίες των κύκλων. Εξαιτίας αυτού η γεωμετρία προηγείται της σφαιρικής, ακριβώς όπως η ακινησία προηγείται της κίνησης.

«Εφόσον όμως η επιστημονικά έλλογη δύναμη γεννά αυτές τις επιστήμες, φροντίζοντας όχι για την εξέλιξη των μορφών της που κατέχουν μια άπειρη δύναμη, αλλά για την κατανόηση του γένους του ορίου, για αυτό οι Πυθαγόρειοι λέγουν ότι οι μαθηματικές επιστήμες, παραμερίζοντας το άπειρο, γνωρίζουν τώρα την πεπερασμένη ποσότητα. Διότι η διάνοια έχει εγκαθιδρύσει στην επιστημονικά έλλογη δύναμη όλες τις αρχές, τόσο του πλήθους όσο και του μεγέθους· εφόσον η δύναμη αυτή συνολικά συνίσταται σε σχέση με τον εαυτό της από όμοια μέρη, είναι μια και αδιαίρετη, και πάλι διαιρετή. Κατά παρόμοιο τρόπο, αποκαλύπτοντας στο φως τον κόσμο των μορφών, συμμετέχει στο πέρας και το άπειρο ουσιαστικά από το επίπεδο των νοητών. Αλλά αυτή αντιλαμβάνεται πράγματι νοητικά από τη συμμετοχή της στο πέρας, ενώ γεννά ζωτικές ενέργειες και διάφορες παραγωγικές αρχές από τη φύση του άπειρου. Οι νοήσεις επομένως της έλλογης δύναμης συγκροτούν αυτές τις επιστήμες σύμφωνα με το πέρας που περιέχουν και όχι σύμφωνα προς το άπειρο της ζωής. Διότι αυτές φέρουν μαζί τους μια εικόνα διάνοιας, αλλά όχι ζωής. Τέτοιο λοιπόν είναι το δόγμα των Πυθαγο-

ρείων και η διαίρεση των τεσσάρων μαθηματικών επιστημών σύμφωνα με αυτούς».

Σελ. 74: *«Αρτιάκις άρτιος είναι ο αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ίσα μέρη και καθένα από αυτά μπορεί να διαιρεθεί σε δύο άλλα ίσα μέρη, από τα οποία καθένα μπορεί να διαιρεθεί με όμοιο τρόπο, και η διαίρεση μπορεί να συνεχισθεί μέχρι να σταματήσει με φυσικό τρόπο στην αδιαίρετη μονάδα».*

Ο Ευκλείδης κατηγορείται από τον Ασκληπιό στο χειρόγραφο Σχόλιο του στο πρώτο βιβλίο του Νικόμαχου, για τον ορισμό του αρτιάκις άρτιου αριθμού, όπως ακολουθεί: «Εντεύθεν τοίνυν ελέγχεται ο Ευκλείδης κακώς όρισάμενος εν τω εβδόμω Βιβλίω τον αρτιάκις άρτιον αριθμόν, φησί γάρ ότι αρτιάκις αριθμός εστίν ο υπό αρτίου αριθμού μετρούμενος κατά άρτιον αριθμόν ταυτώ γάρ τω λόγω και οι, άρτιοι μόνως, καί μή όντες αρτιάκις άρτιοι ευρεθήσονται». Δηλαδή: «Εδώ λοιπόν ο Ευκλείδης επιτιμάται, ο οποίος δεν ορίζει σωστά τον αρτιάκις άρτιο αριθμό στο 7ο βιβλίο. Διότι αυτός ισχυρίζεται ότι ο αρτιάκις άρτιος αριθμός είναι εκείνος που μετρείται από άρτιο αριθμό σύμφωνα προς άρτιο αριθμό. Διότι με τον ορισμό αυτό μόνο άρτιοι αριθμοί, και όχι αριθμοί που είναι αρτιάκις άρτιοι θα βρεθούν». Κατά τον ίδιο τρόπο ο Ευκλείδης κατηγορείται από τον Ιάμβλιχο για τον ίδιο ορισμό. Και πραγματικώς, δίκαια. Διότι όπως ο Μπουλιάλντους παρατηρεί στις *Σημειώσεις του στο Θέωνα,* σελ. 232, το 6, για παράδειγμα, μετρά το 24 με τον άρτιο αριθμό 4. Αλλά το 24 δεν είναι αρτιάκις άρτιος αριθμός. Διότι η διαίρεση λήγει προτού φθάσει στη μονάδα· εφόσον το 24 διαιρείται στο 12, το 12 στο 6 και το 6 στο 3· αλλά εδώ τελειώνει η διαίρεση και δεν μπορεί να προχωρήσει παραπέρα. Επομένως, προσθέτει, ο Ευκλείδης δίκαια κατηγορείται, επειδή ο ορισμός του είναι ατελής και περισσότερο περιορισμένος από όσο θα έπρεπε.

Σελ. 79: «Ο *περισσάρτιος αριθμός συντίθεται... κ.λπ.». Ο* Ιάμβλιχος, άντρας οξύτατου πνεύματος, όπως ο Μπουλιάλντους σωστά τον αποκαλεί, κατηγορεί και πάλι τον Ευκλείδη στο *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής ό-*

τι συγχέει τον αρτιοπέρισσο με τον περισσάρτιο αριθμό καθώς και για τη μη διάκριση από τον αρτιάκις άρτιο αριθμό. Και σίγουρα, καθώς παρατηρεί ο Μπουλιάλντους, ο Ευκλείδης έπρεπε να είχε κάνει διάκριση των περιττών αριθμών από τους περισσάρτιους, και αυτών πάλι από τους αρτιάκις άρτιους, οι οποίοι συγχέονται από αυτόν.

Σελ. 137, Κεφ. VI: *«Τετράγωνος αριθμός είναι... κ.λπ.»*

Σε αυτό και στα δυο επόμενα κεφάλαια παρουσιάζεται η γένεση των τετραγώνων, πενταγώνων, εξαγώνων, κ.λπ. Αρχικά είναι αναγκαίο να παρατηρήσουμε ότι μία άλλη γένεση των τετραγώνων παραδίδεται από αρχαίους συγγραφείς, και ονομάζεται από εκείνους *«δίαυλος»*[56], ή *«μία κυκλική πορεία από το ίδιο προς το ίδιο».* «Διότι στη μέθοδο αυτή», λέγει ο Ιάμβλιχος, «η μονάδα γίνεται ταυτόχρονα εκκίνηση και τέλος σε κάθε σύνθεση. Διότι από αυτήν αρχίζει η πρόοδος στη γένεση κάθε τετράγωνου, σαν από την εκκίνηση προς το τέλος, που είναι η πλευρά του τετράγωνου». Έτσι, για παράδειγμα, με σκοπό να παράγουμε ένα τετράγωνο που η πλευρά του είναι 4, ας τοποθετήσουμε τους αριθμούς αρχίζοντας από τη μονάδα, όπως από την αφετηρία ενός Ιππόδρομου, μέχρι το 4, και πάλι από το 4 σε μία ανάδρομη τάξη μέχρι τη μονάδα, όπως παρακάτω:

1 2 3 4 3 2 1

Το άθροισμα όλων αυτών είναι 16, ένας τετράγωνος αριθμός, που η πλευρά του είναι 4. Θέλοντας επίσης να παράγουμε ένα τετράγωνο που η πλευρά του είναι 5, πρέπει να τοποθετηθούν οι αριθμοί αρχίζοντας από τη μονάδα κατά παρόμοιο τρόπο, όπως ακολουθεί:

1 2 3 4 5 4 3 2 1

Το άθροισμα αυτών είναι 25 και συνεπώς η πλευρά είναι 5. Και το ίδιο σε όλα τα άλλα παραδείγματα.

Αλλά αν ένας αριθμός κατανεμηθεί σε μονάδες και σε αυτή την κατανεμημένη μορφή πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, οι αριθμοί θα τοποθετηθούν όπως παρακάτω:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & +1 & +1 & +1 & & & \\
1 & +1 & +1 & +1 & & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & +1 & & & \\
 & +1 & +1 & +1 & +1 & & \\
 & & +1 & +1 & +1 & +1 & \\
 & & & +1 & +1 & +1 & +1 \\
\hline
1 & +2 & +3 & +4 & +3 & +2 & +1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & +1 & +1 & +1 & +1 & & & & \\
1 & +1 & +1 & +1 & +1 & & & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & +1 & +1 & & & & \\
 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & & & \\
 & & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & & \\
 & & & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & \\
 & & & & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\
\hline
+1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +4 & +3 & +2 & +1
\end{array}
$$

Για να διευκολύνουμε τη γνώση της γένεσης των πολυγωνικών αριθμών προσθέτουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας Πολυγώνων

Γνώμονες τριγώνων	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Συνολικά τρίγωνα	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
Γνώμονες τετραγώνων	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
Συνολικά τετράγωνα	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Γνώμονες πενταγώνων	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
Συνολικά πεντάγωνα	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210
Γνώμονες εξαγώνων	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
Συνολικά εξάγωνα	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	270
Γνώμονες επταγώνων	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56
Συνολικά επτάγωνα	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342

Γνώμονες οκταγώνων	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67
Συνολικά οκτάγωνα	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408
Γνώμονες εννεαγώνων	1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
Συνολικά εννεάγωνα	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474
Γνώμονες δεκαγώνων	1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89
Συνολικά δεκάγωνα	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540

Ο Ιάμβλιχος έχει λάβει τις ακόλουθες λεπτομέρειες σχετικά με αυτόν τον πίνακα από τα *«Επανθήματα»* ή *«Αριθμητικά Άνθη»* του Θυμαρίδα:

«Τα πολύγωνα σχηματίζονται από τρίγωνα. Το πρώτο τρίγωνο εν δυνάμει, το 1, είναι η διαφορά των πρώτων πολυγώνων εν ενεργεία στην καθοδική σειρά στον πίνακα. Για παράδειγμα, το πρώτο τρίγωνο εν ενεργεία είναι το 3, το πρώτο τετράγωνο το 4, το πρώτο πεντάγωνο το 5, το πρώτο εξάγωνο το 6, κ.λπ. και η διαφορά ανάμεσα σε αυτά είναι το 1. Ομοίως, το πρώτο τρίγωνο εν ενεργεία, το 3, είναι η διαφορά των δεύτερων πολυγώνων εν ενεργεία, των 6, 9, 12, 15, κ.λπ., στην καθοδική σειρά. Και όλοι οι γνώμονες των επταγώνων λήγουν όπως ο πρώτος και ο δεύτερος, δηλαδή σε 1 και 6.

Στη σειρά των εξαγώνων βρίσκονται όλοι οι τέλειοι αριθμοί, όπως 6, 28, κ.λπ. Ομοίως, όλα τα εξάγωνα είναι τρίγωνα, με ένα τρίγωνο να παραλείπεται εναλλάξ στη σειρά των τριγώνων, όπως 1, 6, 15, 28, 45, κ.λπ. Επίσης, οι τέλειοι αριθμοί που περιέχονται στη σειρά των εξαγώνων είναι τριγωνικοί, όπως 6, 28, κ.λπ. Στη σειρά των πενταγώνων δύο από αυτά είναι εναλλάξ άρτιοι αριθμοί και δύο περιττοί. Και από τους άρτιους ένας αριθμός είναι αρτιοπέρισσος, αλλά ο άλλος είναι περισσάρτιος. Έτσι, 1 και 5 είναι περιττοί, αλλά 12 και 22 είναι άρτιοι. Κατόπιν εκ περιτροπής το 12 είναι περισσάρτιος, ενώ το 22 αρτιοπέρισσος.

Στην καθοδική σειρά αυτών των αριθμών, μετά τη σειρά των μονάδων, τα πρώτα πολύγωνα διαφέρουν κατά τη μονάδα, όπως 3, 4, 5, 6· τα δεύτερα κατά 3, όπως 6, 9, 12, κ.λπ.· τα τρίτα κατά 6, όπως 10, 16, 22, κ.λπ.· τα τέταρτα κατά 10,

όπως 15, 25, 35, κ.λπ.· και τα πέμπτα κατά 15, όπως 21, 36, 51, κ.λπ.· ώστε όλες αυτές οι διαφορές βρίσκονται στη σειρά των τρίγωνων.

Όλα τα δεύτερα και τρίτα πολύγωνα από τη μονάδα έχουν επιμόριους λόγους, όπως 3, 4, 5, 6 και επίσης 6, 9, 12, 15. Αλλά τα τέταρτα πολύγωνα από τη μονάδα έχουν επιμερείς λόγους, όπως 10, 16, 22, 28.

Κάθε τετράγωνο συντίθεται από το παραπάνω τρίγωνο και το αμέσως προηγούμενο αυτού, όπως το 9 από τα τρίγωνα 6 και 3. Κάθε πεντάγωνο συντίθεται από το παραπάνω τρίγωνο και το διπλάσιο του προηγούμενου αυτού, όπως το 12 από το 6 και το διπλάσιο του 3. Κάθε εξάγωνο από το παραπάνω τρίγωνο και το τριπλάσιο του προηγούμενου τριγώνου, όπως το 15 από το 6 και το τριπλάσιο του 3· και ούτω καθεξής, ο αριθμός του προηγούμενου τριγώνου αυξανόμενος κατά τη μονάδα. Το πεντάγωνο 12 συντίθεται από το τετράγωνο 9 και το προηγούμενο τετράγωνο 4, αν αφαιρεθεί από το άθροισμα το πρώτο τρίγωνο, δηλαδή η μονάδα. Το εξάγωνο 15 αποτελείται από το 12 που είναι τοποθετημένο επάνω από αυτό και το προηγούμενο πεντάγωνο 5, αν αφαιρεθούν τα δύο τρίγωνα της μονάδας από το άθροισμα. Το επτάγωνο 18 αποτελείται από το εξάγωνο 15 που είναι τοποθετημένο επάνω από αυτό, και το προηγούμενο εξάγωνο 6, αφαιρούμενων τριών τριγώνων της μονάδας από το άθροισμα. Το τετράγωνο 16 αποτελείται από τα τρίγωνα 10 και 6. Το πεντάγωνο 22 αποτελείται από το τετράγωνο 16 και το τρίγωνο 6. Το εξάγωνο 28 από το πεντάγωνο 22 και το τρίγωνο 6. Το επτάγωνο 34 από το εξάγωνο 28 και το τρίγωνο 6. Το τετράγωνο 16 αποτελείται από τα τρίγωνα 10 και 6, ακριβώς και ολοκληρωμένα. Αλλά το πεντάγωνο 22 αποτελείται από τα τετράγωνα 16 και 9, μείον μία φορά το πρώτο τρίγωνο εν ενεργεία, το 3. Το εξάγωνο 28 αποτελείται από τα πεντάγωνα 22 και 12, μείον δυο φορές το πρώτο τρίγωνο εν ενεργεία, δηλαδή μείον 6. Και το επτάγωνο 34 αποτελείται από τα εξάγωνα 28 και 15, μείον τρεις φορές το πρώτο τρίγωνο εν ενεργεία, δηλαδή μείον 9.

Σελ. 148, Κεφ. XIV: *«Σχετικά με τους ετερομήκεις... κλπ.»*. Επειδή οι αριθμοί αυτοί αποχωρούν από την ισότητα που υπάρχει στους τετράγωνους, οι Πυθαγόρειοι τους κατέτασσαν στη συνεργασία των κακών πραγμάτων, ενώ κατέτασσαν τους τετράγωνους στη συνεργασία των αγαθών πραγμάτων. Ο λόγος όμως για την κατάταξη αυτή είναι ότι όλοι οι τετράγωνοι αριθμοί, ή σχήματα, είναι όμοιοι προς εαυτούς και έχουν ίσες πλευρές, που έχουν τον ίδιο λόγο η μία προς την άλλη. Έτσι, βρίσκονται εν ηρεμία και δεν αποχωρούν από τη μονάδα. Αλλά οι ετερομήκεις αριθμοί και τα ετερομήκη σχήματα είναι ανόμοια μεταξύ τους και έχουν επίσης ανόμοιο λόγο των πλευρών τους. Διότι όπως στη φυσική ακολουθία των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6 κ.λπ., ο λόγος του τελευταίου προς τον αμέσως προηγούμενο όρο μειώνεται συνεχώς, έτσι στους ετερομήκεις αριθμούς όσο αυτοί αυξάνονται, τόσο μικρότερος είναι ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς προς τη μικρότερη. Για παράδειγμα, το 12 είναι ένας ετερομήκης αριθμός, που η μεγαλύτερη πλευρά του είναι το 4 και η μικρότερη το 3. Ο λόγος όμως της πρώτης προς την τελευταία είναι επίτριτος, που είναι μικρότερος από τον ημιόλιο, επειδή το 1/3 είναι μικρότερο από το 1/2. Ο Ευκλείδης

ποτέ δε διακρίνει τους ετερομήκεις αριθμούς από τους προμήκεις. Συμπεριλαμβάνει δε όλα τα είδη στο γενικό όνομα επίπεδοι, πράγμα για το οποίο επιτιμάται από τον οξυδερκή Ιάμβλιχο, όπως ακολουθεί: «Αυτό επίσης μη αντιλαμβανόμενος ο Ευκλείδης, συγχέει τη μεταβολή και την ποικιλία της εξήγησης. Διότι νόμιζε ότι ο ετερομήκης αριθμός είναι απλώς εκείνος που παράγεται από τον πολλαπλασιασμό δυο άνισων αριθμών και δεν τον διέκρινε από τον προμήκη. Αν όμως κάποιος αποδεχόταν αυτόν τον ορισμό, θα αποδεχόταν ότι τα αντίθετα, τα οποία είναι φύσει ανίκανα να συνυπάρξουν, βρίσκονται στο ίδιο υποκείμενο. Διότι ο ορισμός του συμπεριλαμβάνει και τους τετράγωνους αριθμούς και τους ετερομήκεις.

Σελ. 201: ... *επίσης τέλειοι αριθμοί.* Κάθε τέλειος είναι ένας τριγωνικός αριθμός, που η πλευρά του είναι ο θεμελιώ-

δης αριθμός από τον οποίο σχηματίστηκε. Αν ο θεμελιώδης αριθμός υψωθεί στο τετράγωνο, θα ισούται με το άθροισμα του ίδιου του τέλειου αριθμού και του αμέσως προηγούμενου τριγωνικού αριθμού. Έτσι 7x7=49 και 49=21+28. Επίσης, 31x31=961 και 961=465+496. Το ίδιο και για τους υπόλοιπους.

Σελ. 195: *«Στη σειρά* $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$, *κ.λπ.».* Ομοίως είναι αξιοσημείωτο ότι το άθροισμα οποιουδήποτε πεπερασμένου αριθμού όρων στη σειρά $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας τον τελευταίο όρο με τον παρανομαστή του προηγούμενου όρου. Έτσι το άθροισμα $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ισούται με $3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Ομοίως το άθροισμα $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ ισούται με $6\times\frac{1}{10}=\frac{6}{10}$. Επίσης, το άθροισμα των $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ ισούται με $\frac{10}{15}$. Το ίδιο και για τους υπόλοιπους.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Οι μορφές υπάρχουν στην ακρότητα της νοητής τριάδας. Η τριάδα απαρτίζεται από ύπαρξη, ζωή και διάνοια. Αλλά η ύπαρξη και η ζωή, με όλα τα περιεχόμενα τους, εμπλέκονται εδώ σε μια αδιαίρετη ενότητα. Βλέπε τη μετάφραση μου του Πρόκλου σχετικά με τη Θεολογία του Πλάτωνα.
2. Στο *Μετά τα Φυσικά* του Αριστοτέλη, Βιβλίο 13.
3. Δηλαδή παραγωγικές αρχές.
4. Βλέπε τις σημειώσεις του συγγραφέα στη μετάφραση του έργου *Μετά τα Φυσικά* του Αριστοτέλη.
5. Από αυτό το απόσπασμα του Σιμπλίκιου είναι φανερό πόσο σφάλλουν εκείνοι που υποθέτουν ότι με το πυρ στο κέντρο οι Πυθαγόρειοι εννοούσαν τον ήλιο, και ως συνέπεια αυτού αποδίδουν το σύστημα του Κοπέρνικου στον Πυθαγόρα, ως εφευρέτη. Βλέπε την εισαγωγή του Τ. Τέιλορ στον *Τίμαιο,* τομ. ΙΙ της μετάφρασης του Πλάτωνα· επίσης τη σημείωση του ίδιου στον *Ύμνο προς την Εστία,* στη μετάφραση των Ορφικών ύμνων.
6. Αυτές οι δύο μεγάλες αρχές δεν ονομάζονται μόνο μονάδα και δυάδα, αλλά και πέρας και άπειρο.
7. Το τελευταίο μέρος αυτού του αποσπάσματος στο πρωτότυπο είναι λανθασμένο, διότι είναι «υπό δέ δύο όντες ευθειών ποτέ, είτε γωνιών, ευθύγραμμον συνίσταται σχήμα». Αντί αυτού είναι αναγκαίο να διαβαστεί, όπως στη μετάφραση μου, «υπό δε δύο όντες είτε ευθειών, είτε γωνιών, ου ποτέ ευθύγραμμον συνίσταται σχήμα».
8. Περί Ουρανού, Βιβλ. Α', κεφ.1.
9. Στο *«Των Κατά το Μαθηματικόν Χρησίμων εις της Πλάτωνος Ανάγνωσιν», α.* 147.
10. «Ου, μα τον αμετέρα ψυχά παραδόντα τετρακτύν, παγάν αενάου φύσιος ριζώματ' έχουσαν» (Σ.τ.μ.).

11. Ισάκις ίσος = αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με τον εαυτό του (Σ.τ.μ.).
12. Ισάκις ισάκις ίσος= αριθμός υψωμένος στην τρίτη δύναμη, δηλαδή με ίσες τις τρεις διαστάσεις. Π.χ. 8 = 2 x 2 x 2 = 2, 27 = 3 x 3 x 3 = 3^{3}, είναι εν δυνάμει κύβοι (Σ.τ.μ.).
13. Αντί *«περιττούται»* είναι ανάγκη να διαβαστεί *«περατούται».* Απορώ πώς ο διαβασμένος Μπουλιάλντους δεν παρατήρησε αυτή τη διόρθωση.
14. Το 5 είναι κατ' εξοχήν κυκλικός και σφαιρικός αριθμός, επειδή σε κάθε πολλαπλασιασμό λήγει στον εαυτό του, ή τον επαναφέρει.
15. Βλέπε εξήγηση στο κεφάλαιο σχετικά με τις ιδιότητες της επτάδας.
16. Νέμεσις ή «δέουσα απονομή», ο ηθικός έλεγχος πάνω στην τύχη (Ρ. Γκρέιβς, Ελληνικοί Μύθοι, σ. 132) (Σ.τ.μ.).
17. Δηλαδή είναι στο μέσο της σειράς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
18. Τριοδίτις (λατινικά Trivia): επίθετο που αποδιδόταν στην Εκάτη, επειδή λατρευόταν σε τριόδους (=τρίστρατα).
19. Κόρη του Ασκληπιού (Σ.τ.μ.).
20. Η ακαταπόνητη, η αδάμαστη. Όνομα της Αθηνάς (Σ.τ.μ.).
21. Όνομα της Αθηνάς (Σ.τ.μ.).
22. Δηλαδή από το έβδομο μέρος της, που είναι το 1.
23. Μήτις: Τιτανίδα, την κατάπιε ο Ζευς για να μη γεννήσει το γιο που θα τον εκθρόνιζε. Ήταν η τιτανίδα της 4ης ημέρας (του Ερμή), της σοφίας και γνώσης (Σ.τ.μ.).
24. Στην *Αριθμητική Εισαγωγή* του Νικόμαχου.
25. Συγγραφέας Ετυμολογικών.
26. Δηλαδή μπορεί να διαιρεθεί με το 2 μέχρι τη μονάδα.
27. Δηλαδή έναν τριγωνικό αριθμό.
28. Δηλαδή στη γεωμετρική πρόοδο του 3: 1, 3, 9, 27, 81, κ.λπ.
29. Εκάεργος: επίθετο του Απόλλωνα, σημαίνει αυτός που τοξεύει μακριά, που ακοντίζει μακριά (Σ.τ.μ.).
30. *«Νύσσα»* σημαίνει στόχος. Επομένως το ρήμα *επινύσσω* υπονοεί εδώ μια σαΐτα ή βέλος, που έχει φθάσει στον προορισμό του διεισδύοντας στο σημείο του στόχου.

31. «Πρόεισι γάρ ο θείος αριθμός, ώς φησίν ό Πυθαγόρειος εις αυτόν ύμνος,
μονάδος έκ κευθμώνος ακήρατου εστ' άν ίκηται
τετράδα επί ζαθέην, ή δή τέκε μητέρα πάντων,
πανδεχέα, πρέσβειραν, όρον περί πάσι τιθείσαν,
άτροπον, άκάματον, δεκάδα κλείουσι μην άγνήν
αθάνατοι τε θεοί και γηγενέεις άνθρωποι.
Πρόκλου, ***Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιον,*** σελ. 269.
Αλλά η τελευταία σειρά είναι από το έργο του Συριανού για το ***Μετά τα Φυσικά*** του Αριστοτέλη

32. Βλέπε τον Πίνακα στο πρώτο βιβλίο της ***Αριθμητικής*** του Μαυρόλυκου (Maurolycus).

33. ***«Των Κατά το Μαθηματικόν Χρησίμων εις της Πλάτωνος Ανάγνωσιν»,*** σελ. 156.

34. Βλέπε Κεφ. V.

35. Ο Μπουλιάλντους, από τον οποίο προέρχεται η πληροφορία και ο οποίος την αντλεί από τον ανώνυμο συγγραφέα των ***Θεολογουμένων της Αριθμητικής,*** κάνει πολύ μεγάλο λάθος στην έννοια της λέξης ***ανταπόδοσις*** (αποκατάσταση) σε αυτό το σημείο. Διότι λέγει «per ***ανταπόδοσιν*** intelligere oportet effectus productos a causis». Όμως αυτή η λέξη δε σημαίνει στο συγκεκριμένο κείμενο τα αποτελέσματα που παράγονται από αιτίες, αλλά σημαίνει την αποκατάσταση των μερών προς τα ολόκληρα από τα οποία απορρέουν. Γιατί σε κάθε τάξη πραγμάτων υπάρχει ***μονιμότητα, πρόοδος*** και ***επιστροφή*** στις αιτίες.

36. Δηλαδή 4 x 4=4+4+4+4. Το εμβαδό του τετραγώνου με πλευρά 4 ισούται με την περίμετρο του (Σ.τ.μ).

37. Μπορεί επίσης να δειχθεί -όπως ακολούθως- ότι οι χρόνοι μιας βιώσιμης γέννησης εξαρτώνται από την εξάδα. Ας πάρουμε το 6 και το 12, τα οποία έχουν λόγο δυο προς ένα και επίσης ας πάρουμε τους δυο αρμονικούς μέσους 8 και 9. Το άθροισμα αυτών των τεσσάρων αριθμών είναι 35, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το 6 παράγει 210, το χρόνο των επτά μηνών. Ας πάρουμε τώρα το 6 και το 18, που έχουν λόγο τρία προς ένα, και ομοίως τους δυο αρμονικούς μέσους, 9 και 12. Το άθροισμα αυτών των τεσσάρων είναι 45, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το 6, εμφανίζει το άθροισμα των 270 ημερών, το χρόνο των εννέα μηνών.

38. Ομοίως, δυο οποιοιδήποτε αριθμοί που συνθέτουν το 8 είναι είτε και οι δυο περιττοί, είτε και οι δυο άρτιοι. Δηλαδή το 1

και το 7 ή το 5 και το 3, είναι όλοι τους περιττοί· αλλά το 2 και το 6, ή 4 και 4, είναι όλοι τους άρτιοι.

39. Κατά όμοιο τρόπο, σε δυο οποιουσδήποτε αριθμούς που συγκροτούν το 9 και το 7, ο ένας είναι περιττός και ο άλλος άρτιος. Έτσι 1+8=9, 2+7=9, 3+6=9, και 4+5=9. Και πάλι, 1+6=7, 2+5=7 και 3+4=7.

40. Έτσι 1x2x2x2x2x2x2=64 και 1x3x3x3x3x3x 3=729.

41. Διότι 64x2x2x2x2x2x2=4096. Επίσης, η εβδομάδα που συντίθεται βάσει του λόγου τρία προς ένα από το 64, θα είναι 46656, που είναι συνάμα τετράγωνο και κύβος· διότι η τετραγωνική ρίζα του είναι 216 και η κυβική ρίζα 36.

42. Μουσικός Κανόνας: Σύνθεση που το μέλος της επαναλαμβάνεται περιοδικά από καθεμία από τις φωνές (Σ.τ.μ.).

43. Δηλαδή: Το πρώτο ορθογώνιο τρίγωνο που οι πλευρές του είναι μετρήσιμες, αποτελείται από τους αριθμούς 3, 4 και 5. Διότι το εμβαδόν ενός τέτοιου τριγώνου είναι το 6, το οποίο ισούται με το μισό του γινομένου των δυο πλευρών 3 και 4, δηλαδή με (3 χ 4):2. Αλλά οι πλευρές οποιουδήποτε ορθογώνιου τριγώνου, που το εμβαδόν του είναι μικρότερο από 6, θα είναι μη μετρήσιμες, Έτσι, εαν 5 είναι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου τριγώνου, θα ισούται με (2x5):2 ή με (1 x 10):2. Έτσι, οι δυο μικρότερες πλευρές θα είναι είτε 2 και 5, είτε 1 και 10· και η υποτείνουσα θα είναι είτε η τετραγωνική ρίζα του 29, είτε η τετραγωνική ρίζα του 101, που το καθένα τους είναι μη μετρήσιμα. Έτσι επίσης θα έχει η κατάσταση αν το εμβαδόν είναι 4, ή 3, ή 2. Και καθώς το μετρήσιμο προηγείται εκ φύσεως από το μη μετρήσιμο, το ορθογώνιο τρίγωνο που οι πλευρές του είναι 3, 4, και 5, θα είναι η αρχή των υπολοίπων. Έτσι επίσης, είναι φανερό γιατί το 3 και το 4 σχηματίζουν την ορθή γωνία.

44. Διότι 1+2+3+4+5+6+7=28

45. Έτσι στους αριθμούς 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, που είναι σε λόγο δύο προς ένα, το 4 είναι τετράγωνο, το 8 είναι κύβος και το 64 είναι και τετράγωνο και κύβος. Επίσης, στους αριθμούς 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, που είναι σε λόγο τρία προς ένα, το 9 είναι τετράγωνο, το 27 κύβος και το 729 είναι και τετράγωνο και κύβος. Όμοια θα εμφανίζεται η κατάσταση με αριθμούς σε λόγο τέσσερα προς ένα, πέντε προς ένα κ.λπ.

46. Βλέπε Κεφ. XXXII στο Βιβλίο Δύο.

47. *«Των Κατά το Μαθηματικόν Χρησίμων εις της Πλάτωνος Ανάγνωσιν»,* σελ. 162.

48. Κύβιτον: αρχαίο μέτρο μήκους, περίπου 50 εκατοστά (Σ.τ.μ.).

49. Βλέπε Σημειώσεις του Μπουλιάλντους στα Μαθηματικά του Θέωνα, σελ. 284.

50. Στο πρωτότυπο *«πείθουσα προφάσει, και διπλοτάτοις μονάδος»,* το οποίο είναι φανερώς εσφαλμένο και ακατανόητο λόγω της λέξης *«διπλοτάτοις».* Ο Μπάξτερ (Baxter), μη όντας ικανός να διορθώσει αυτό το κείμενο, δεν προσπαθεί να το μεταφράσει, αλλά απλώς λέει «...την αποκαθιστά στο περιθώριο από όπου πάρθηκε». Όμως όλη η φράση θα γίνει κατανοητή, αν αντί *«διπλοτάτοις»,* αναγνώσουμε, όπως στην παραπάνω μετάφραση, *«απλότητι της».*

51. Ο Μπάξτερ, που είναι πάντοτε κακός μεταφραστής και κριτικός της φιλοσοφίας και της επιστήμης, μεταφράζει λανθασμένα το απόσπασμα του Πλούταρχου για τον αριθμό 36: «Επειδή αυτό δημιουργείται από τον άρτιο αριθμό 4 και από τέσσερις περιττούς αριθμούς, αθροισμένους». Και μετά προσθέτει σε μια σημείωση, «δηλαδή, τέσσερις φορές το 9».

52. Στο πρωτότυπο *«καταράσεως»,* αλλά θα έπρεπε εμφανώς να είναι, όπως στη μετάφραση μου, *«κατακράσεως».* Ο Τενέλιους (Tenellius), μη βλέποντας αυτό το λάθος, έκανε το κείμενο ακατανόητο. Διότι η μετάφρασή του είναι: «Item connubium vocari a Pythagoraeis, quia per se primum fit conjunctio maris et feminae ex conflictu».

53. Η ψυχή έχει τρία οχήματα, το αιθερικό, το αέρινο και το επίγειο σώμα. Το πρώτο, το οποίο είναι φωτεινό και ουράνιο, είναι συγγενές με την ουσία της ψυχής και σε αυτό μόνο κατοικεί σε κατάσταση μακαριότητας στα αστέρια. Στο δεύτερο υποφέρει τις τιμωρίες των αμαρτιών της μετά θάνατον. Και με το τρίτο γίνεται κάτοικος της γης.

54. Πηλίκος: πόσο μεγάλος. Αναφέρεται στο μέγεθος, σε αντίθεση με το πόσος, που αναφέρεται στην ποσότητα (Σ.τ.μ.).

55. Δηλαδή μια ευθεία και μια κυκλική γραμμή.

56. Δίαυλος = διπλός δρόμος στον οποίο ο αγωνιζόμενος έτρεχε μέχρι την άκρη του σταδίου, έκαμπτε τη στήλη που βρισκόταν εκεί και επανερχόταν πίσω από την άλλη πλευρά του σταδίου (Σ.τμ.).

Το πνεύμα του Πυθαγόρα και της Σχολής του παραμένει άσβεστο στους καιρούς μας, καθώς σε αυτόν οφείλουμε την οργανωμένη παρουσίαση των μαθηματικών όχι μόνον ως επιστήμης, αλλά ως βαθύτατου φιλοσοφικού συστήματος, το οποίο αγγίζει τόσο την υλική πραγματικότητα όσο και την αχανή περιοχή των ουράνιων σφαιρών.

Ακρογωνιαίος λίθος της Πυθαγόρειας σκέψης υπήρξε η Θεωρητική Αριθμητική, η γνώση και η φιλοσοφία των αριθμών. Μέσω αυτής η ανθρώπινη διάνοια εκτοξευόταν σε υπέρτατα ύψη και η συνείδηση αγκάλιαζε ολόκληρο το σύμπαν.

Οι θεμελιώδεις αρχές της Θεωρητικής Αριθμητικής παρουσιάζονται στο παρόν έργο με ένα όσο το δυνατόν κατανοητό τρόπο, χρησιμοποιώντας αναφορές από τα σωζόμενα έργα σημαντικών μορφών της Νεοπυθαγόρειας και Νεοπλατωνικής σκέψης, όπως ο Νικόμαχος, ο Ιάμβλιχος, ο Θωμάς ο Σμυρναίος κ.ά.

* * * * *

Ο Τόμας Τέιλορ υπήρξε μια από τις εξέχουσες μορφές της κλασικής φιλοσοφίας του περασμένου αιώνα και ένθερμος εραστής της αρχαίας ελληνικής σκέψης, έχοντας μεταξύ άλλων μεταφράσει ολόκληρο το έργο του Πλάτωνα και του Πλωτίνου στην αγγλική γλώσσα.

ISBN 960-268-060-1